2021

Taller orientado a la carrera: Informática - Matemática

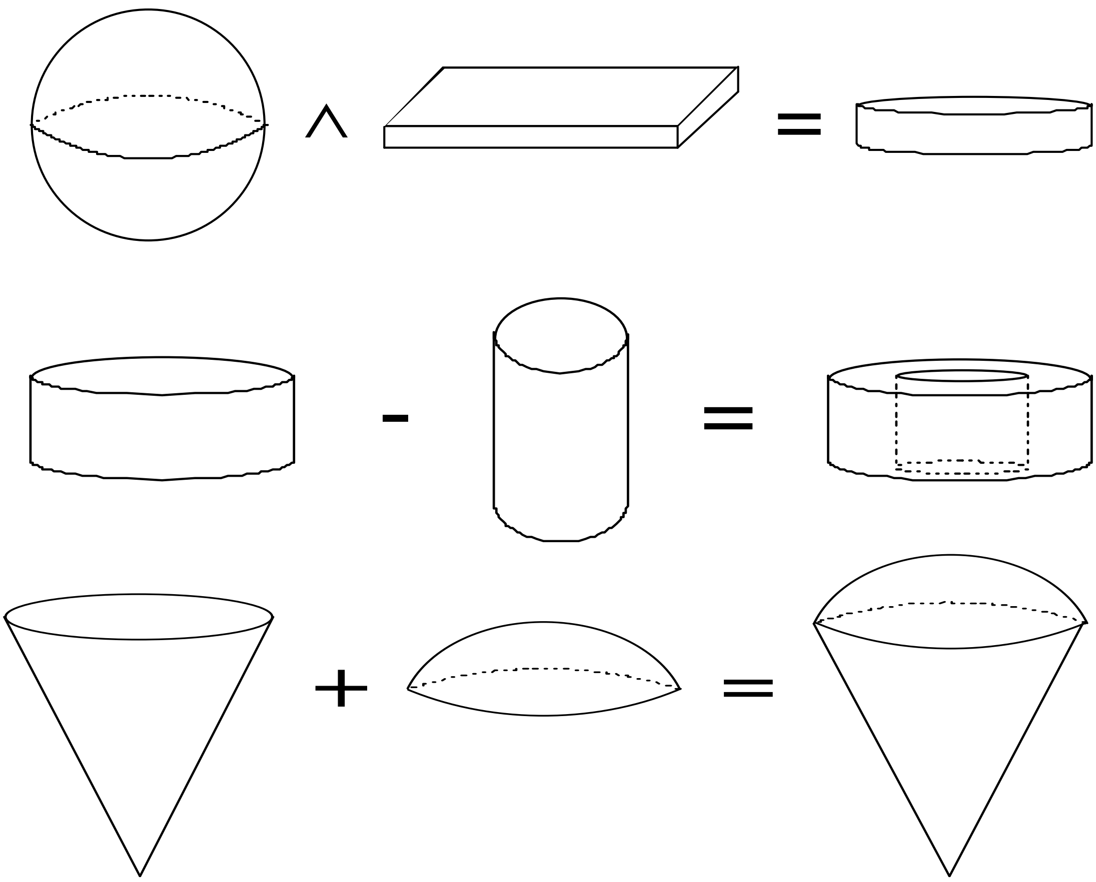
Facultad de Ingeniería

U.N.P.S.J.B.

TEORÍA DE CONJUNTOS

Las gráficas tridimensionales por computadora son muy usadas en las aplicaciones industriales que requieren el diseño asistido por computadora de partes mecánicas. Muchas de éstas son diseñadas mediante un método conocido como **geometría constructiva de sólidos**. Este método utiliza objetos elementales sencillos, llamados primitivos geométricos, para construir formas más complejas. Las esferas, los cubos, los conos, los cilindros y las placas rectangulares son ejemplos de elementos geométricos primitivos (o primarios). Se conceptualizan como conjuntos de puntos con una forma determinada. Para diseñar gráficamente objetos complejos se combinan estos conjuntos primitivos por medio de operaciones tales como unión (+), diferencia (-) e intersección (∧).Por ejemplo, una arandela de acero puede crearse gráficamente por medio de la intersección de una esfera con una placa rectangular a la que luego se le resta un cilindro. Un cono de helado es la unión de una semiesfera con un cono.

Figuras:



Es posible crear un enorme número de formas manufacturadas utilizando esta técnica de graficación .Éste es sólo un ejemplo de cómo la noción de conjunto, un concepto fundamental en matemáticas, se aplica ampliamente tanto en negocios como en la ciencia.

SÍMBOLOS Y TERMINOLOGÍA

La mente humana posee una inclinación natural a reunir o agrupar. Cuando vemos en el cielo cinco estrellas reunidas, en lugar de considerarlas como cinco elementos separados, las personas tendemos a verlas como un grupo de estrellas. Así pues, nuestra mente trata de encontrar orden y patrones. En matemáticas, esta tendencia a agrupar es representada mediante el concepto de *conjunto*. Un **conjunto** es un grupo o colección de objetos. Cada objeto que pertenece al conjunto se denomina **elemento** o **miembro** de ese conjunto.

Los conjuntos pueden expresarse por lo menos de tres maneras: mediante (1) la *descripción verbal*, (2) la *enumeración o listado* y (3) la *notación de construcción de conjuntos.* Por ejemplo, la descripción verbal

El conjunto de los números pares naturales menores que diez

Puede expresarse por enumeración,

$$\{2,4,6,8\}$$

o mediante la notación de construcción de conjuntos,

$$\{x|x\ es\ un\ número\ natural\ par\ menor\ que\ 10\}$$

Por lo general a los conjuntos se les dan nombres (usualmente letras mayúsculas) para facilitar su mención en análisis posteriores. Si elegimos E como nombre para el conjunto de las letras del alfabeto, entonces podemos escribir

$E = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$

En muchos casos, la notación por enumeración puede abreviarse si se establece con claridad el patrón de los elementos del conjunto, utilizando tres puntos para indicar que el padrón continúa.

Así, por ejemplo,

$E =\{a,b,c,d,\ldots, x,y,z\}$ o $E =\{a,b,c,d,e,\ldots,z\}$

<u>EJEMPLO 1</u>

Haga una enumeración completa de los elementos de cada uno de los conjuntos siguientes.

(a) el conjunto de los números naturales entre 6 y 13.

Este conjunto puede denotarse $\{7,8,9,10,11,12\}$

(b) $\{x|x\ es\ un\ número\ natural\ entre\ 6\ y\ 7\ \}$

Nos damos cuenta de que no hay número natural entre 6 y 7, de modo que la lista para este conjunto no tendrá elementos. Podemos escribir el conjunto como { } o $\emptyset$.

Un conjunto que no contiene elementos, tal como el conjunto del ejemplo 1(b) se conoce como **conjunto vacío** .El símbolo $\emptyset$ suele utilizarse para denotar al conjunto vacío , así que { } o $\emptyset$ tienen el mismo significado. Es un *error* denotar el conjunto vacío con el símbolo $\{\emptyset\}$, ya que esta notación representa un conjunto que cuenta con un elemento (el cual es precisamente el conjunto vacío).

Para que un conjunto sea útil, debe estar *bien definido.* Esto significa que dados un conjunto particular y un elemento particular, debe ser posible determinar si el elemento pertenece o no al conjunto. Por ejemplo, el conjunto *E* anterior, de las letras del alfabeto, está bien definido. Si alguien nos da la letra q es un elemento de *E*. Si alguien nos da la letra griega θ(theta) sabemos que no es un elemento de *E*.

El símbolo para mostrar lo anterior es $\in$, que significa "es un elemento de", o

$$q \in E$$

Que se lee "q es un elemento de *E*". La θ no es un elemento de *E*; escribimos:

$$\theta \notin E.$$

Esto se lee" θ no es un elemento de *E*".

Veamos ahora el concepto de igualdad de conjuntos.

Igualdad de conjuntos

El conjunto *A* será **igual** al conjunto *B* siempre que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1. todo elemento de *A* es un elemento de *B*, y

2. todo elemento de *B* es un elemento de *A*.

Dicho de otro modo, dos conjuntos son iguales si contienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden de éstos. Por ejemplo,

$$\{a,b,c,d\} = \{a,c,d,b\}$$

Ya que ambos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos.

Dado que la repetición de elementos en la lista de un conjunto no añade elementos nuevos, podemos decir que

$$\{1,0,1,2,3,3\} = \{0,1,2,3\}$$

Pues los dos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos.

EJEMPLO 2

Decida si cada uno de los siguientes enunciados es *verdadero* o *falso.*

(a) $\{3\} = \{x|x \text{ es un número natural entre } 1 \text{ y } 5\}$

El conjunto del lado derecho contiene a *todos* los números naturales entre 1 y 5, a saber, 2, 3 y 4, mientras que el conjunto de la izquierda *sólo* contiene al número 3.Como los conjuntos no contienen exactamente los mismos elementos, no son iguales. El enunciado es falso.

(b) $\{x|x \text{ es un número natural negativo}\} =$
$\{y|y \text{ es un número que al mismo tiempo racional e irracional}\}$

Todos los números naturales son positivos, por lo que el primer conjunto es $\emptyset$.Por definición, si un número es racional no puede ser irracional, así que el conjunto de la derecha también es $\emptyset$. Como cada conjunto es vacío, ambos conjuntos son iguales. El enunciado es verdadero.

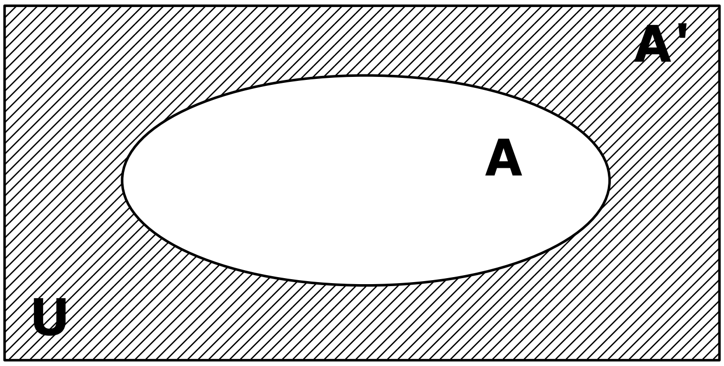
DIAGRAMAS DE VENN Y SUBCONJUNTOS

En cada problema existe, ya sea de forma explícita o implícita, un **universo del discurso**. Dicho universo incluye todos los objetos en consideración en un momento dado. Por ejemplo, si se pretendiera estudiar las reacciones a la propuesta de que en cierto campus se aumente la edad mínima necesaria para comprar cerveza, el universo del discurso podría ser el de todos los estudiantes del campus, los residentes cercanos al campus, la junta directiva, o quizá todos estos grupos de personas.

Dentro de la teoría matemática de conjuntos, el universo del discurso se conoce como **conjunto universal** (o **conjunto universo**).Por lo general al conjunto universal se le representa con la letra *U.*

En la mayoría de las ramas de las matemáticas, diversos tipos de dibujos y diagramas nos resultan de mucha utilidad para exponer o esclarecer nuestros razonamientos. En la teoría de conjuntos comúnmente utilizamos los **diagramas de Venn**, desarrollados por el lógico John Venn (1834-1923).En estos diagramas, el conjunto universal es representado por un rectángulo, y los demás conjuntos relevantes dentro de este universo se representan mediante regiones ovaladas o bien con círculos u otras formas geométricas. En el diagrama de Venn de la figura 1, toda la región encerrada en el rectángulo representa el conjunto universal *U*, mientras que la parte encerrada en el óvalo representa al conjunto *A*. El área sombreada dentro de *U* y fuera del óvalo se representa con A' (se lee “A prima”).Este conjunto, llamado *complemento* de *A*, contiene todos los elementos de *U* que no están contenidos en *A*.

Figura 1:



El complemento de un conjunto

Para cualquier conjunto *A* dentro del conjunto universal *U,* el **complemento** de *A*, designado como A', es el conjunto de elementos de *U* que no son elementos de *A*. Esto es:

$$A' = \{x | x \in U \; y \; x \notin A\}$$

EJEMPLO 3

Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

$M = \{a, b, e, f\}$,
$N = \{b, d, e, g, h\}$

Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) M'

El conjunto M' contiene todos los elementos de *U* que no están en el conjunto M. Puesto que el conjunto M contiene a los elementos a, b, e y f, dichos elementos no podrán pertenecer al conjunto M' estará compuesto por los elementos c , d , g y h; esto es,

$M' = \{c, d, g, h\}$.

(b) N'

El conjunto N' contiene todos los elementos de *U* que no están contenidos en el conjunto N, por lo tanto $N' = \{a, c, f\}$.

Considere el complemento del conjunto universal, o U'.Para encontrar dicho conjunto hay que seleccionar todos los elementos de *U* que no pertenecen a *U.* Tales elementos no existen, por lo que no pueden haber elementos en el conjunto U'.Esto significa que para todo conjunto universal U , $U' = \emptyset$.

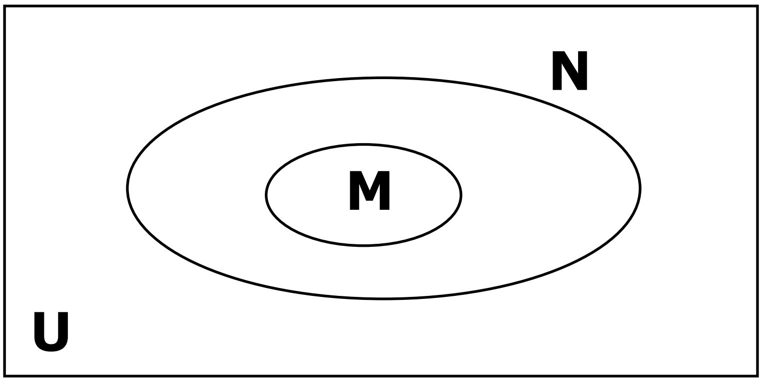
Ahora consideremos el complemento del conjunto vacío, es decir, $\emptyset'$ .Dado $\emptyset' = \{x | x \in U \; y \; x \notin \emptyset\}$, y que el conjunto vacío carece de elementos, entonces todo elemento del conjunto universal U cumple con la definición anterior. Por lo tanto, para cualquier conjunto universal U, $\emptyset' = U$.

Suponga que tenemos el conjunto universal $U = \{1,2,3,4,5\}$, mientras que $A = \{1,2,3\}$.Cada elemento de A también es elemento de U. Por esta razón, el conjunto A se considera *subconjunto* del conjunto U, lo cual se escribe

$$A \subseteq U$$

(La expresión "A no es un subconjunto de U" se escribiría $A \nsubseteq U$.) La figura 2 muestra un diagrama de Venn en el cual el conjunto M es un subconjunto de N.

Figura 2:



SUBCONJUNTO DE UN CONJUNTO

Un subconjunto A es un subconjunto del conjunto B cuando cada elemento de A también es elemento de B. Esto se expresa como

$$A \subseteq B.$$

<u>EJEMPLO 4</u>

Escriba $\subseteq$ o $\nsubseteq$ en el espacio en blanco, según corresponda, para hacer cierta la proposición.

(a) $\{3,4,5,6\} ----\{3,4,5,6,8\}$

Como cada elemento de $\{3,4,5,6\}$ es también elemento de $\{3,4,5,6,8\}$ el primer conjunto es subconjunto del segundo, por lo tanto el símbolo correcto es $\subseteq$.

(b)$\{1,2,3\} ----\{2,4,6,8\}$

El elemento 1 pertenece a $\{1,2,3\}$ pero no a $\{2,4,6,8\}$.El símbolo correcto es $\nsubseteq$.

(c) $\{5,6,7,8\} ----\{5,6,7,8\}$

Cada elemento de $\{5,6,7,8\}$ es también un elemento de $\{5,6,7,8\}$.El símbolo correcto es $\subseteq$.

Como sugiere el ejemplo 2(c) , todo conjunto es subconjunto de sí mismo:

$B \subseteq B\ \ para\ todo\ conjunto\ B$

El enunciado de la igualdad de conjuntos puede presentarse de manera formal por medio de la terminología conjuntos.

IGUALDAD DE CONJUNTOS (una definición alternada)

Si A y B son conjuntos, entonces $A = B\ si\ A \subseteq B\ y\ B \subseteq A$.

Cuando se estudian los subconjuntos de un conjunto B, es común tratar de hallar subconjuntos que sean distintos de B. Suponga que $B = \{5,6,7,8\}$ y $A = \{6,7\}$. A es un subconjunto de B, pero no es todo B; existe por lo menos un elemento de B que no es elemento de A (de hecho aquí son dos elementos, 5 y 8). En este caso, al conjunto A se le conoce como *subconjunto propio* de B. Para indicar que A es subconjunto propio de B, escribimos $A \subset B$.

SUBCONJUNTO PROPIO DE UN CONJUNTO

El conjunto A es subconjunto propio del conjunto B si $A \subseteq B\ \ y\ \ A \neq B$.Esto se expresa como

$$A \subset B$$

EJEMPLO 5

Determine si $\subset$, $\subseteq$ o ambos símbolos pueden entrar en el espacio en blanco para hacer cierta dicha proposición.

(a)$\{5,6,7\}$**---------**$\{5,6,7,8\}$

Cada elemento de $\{5,6,7\}$ está contenido en $\{5,6,7,8\}$; por tanto, puede colocarse $\subseteq$ en el espacio. Por otra parte, el 8 pertenece a $\{5,6,7,8\}$, pero no pertenece a $\{5,6,7\}$, por lo cual $\{5,6,7\}$ es un subconjunto propio de $\{5,6,7,8\}$. Esto significa que $\subset$ también podría colocarse en el espacio.

(b) $\{a, b, c\}$**----------**$\{a, b, c\}$

El conjunto $\{a, b, c\}$ es el subconjunto de $\{a, b, c\}$.Puesto que ambos conjuntos son iguales, $\{a, b, c\}$ no es subconjunto propio de $\{a, b, c\}$. Por lo tanto, sólo $\subseteq$ puede colocarse en el espacio.

El conjunto A es subconjunto del conjunto B si cada elemento del conjunto A es también elemento del conjunto B. Si parafraseamos, el conjunto A es subconjunto del conjunto B si no existen elementos de A que tampoco lo sean de B. Esta segunda forma de definir un subconjunto muestra que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, esto es:

$\emptyset \subseteq B$ $para\ cualquier\ conjunto\ B$

Esto es cierto porque no es posible encontrar elemento alguno en $\emptyset$ que tampoco se encuentre en B (no hay un solo elemento en $\emptyset$).

<u>EJEMPLO 6</u>

De cada conjunto, encuentre todos sus posibles subconjuntos.

(a)$\{7,8\}$

Tiene 4 subconjuntos: $\emptyset$, $\{7\}, \{8\}, \{7,8\}$.

(b) $\{a, b, c\}$

Tiene 8 subconjuntos:$\emptyset$, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Dos candidatos, Adriana Pérez y Juan Sánchez, disputan una banca en el Concejo Deliberante de la ciudad. Una electora que está decidiendo por quién votar recordó las siguientes promesas hechas por los candidatos. Cada promesa está representada por una letra.

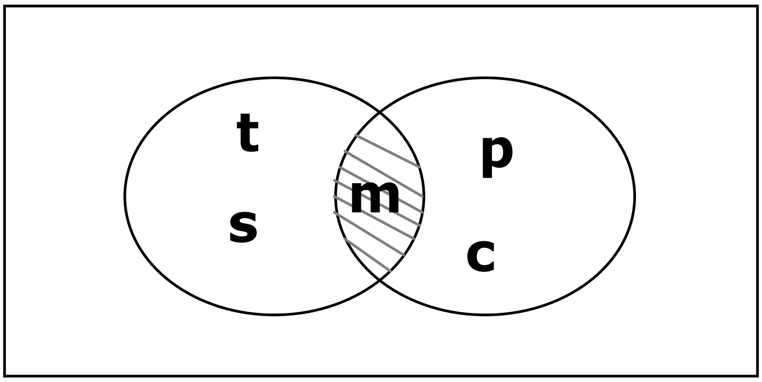
La honrada Adriana Pérez	El decidido Juan Sánchez
Menor gasto, *m* Énfasis en el cumplimiento de las leyes de transporte, *t* Aumento en los servicios en aéreas suburbanas, *s*	Menor gasto, *m* Acabar con políticos corruptos, *p* Aumento en los servicios de la ciudad, *c*

La única promesa en que coinciden ambos candidatos es la *m,* menor gasto. Supongamos que tomamos las promesas de cada candidato como un conjunto. Las promesas de Pérez forman el conjunto $\{m, t, s\}$, mientras que las de Sánchez forman el conjunto $\{m, p, c\}$ .El único elemento común a los dos conjuntos es *m*; este elemento pertenece a la *intersección* de los dos conjuntos, $\{m, t, s\}$ y $\{m, p, c\}$, como se muestra en la zona sombreada del diagrama de Venn en la figura 3. En símbolos,

$$\{m, t, s\} \cap \{m, p, c\} = \{m\},$$

donde el símbolo $\cap$ representa la intersección.

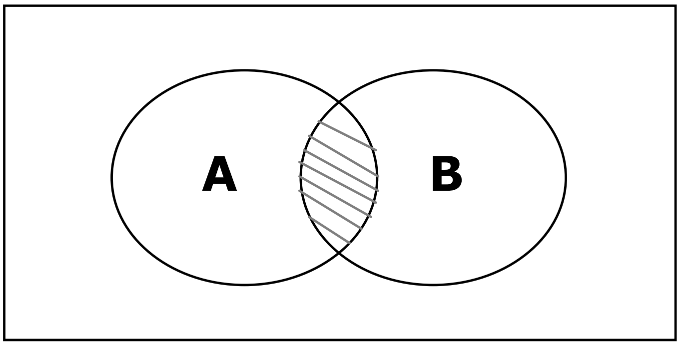
Figura 3:



> **INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS**
>
> La intersección de los conjuntos A y B, que se escribe $A \cap B$, es el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos A y B, esto es:
>
> $$A \cap B = \{x|x \in A \;\; y \;\; x \in B\}$$

Forme la intersección de los conjuntos A y B tomando todos los elementos que se encuentran en ambos conjuntos, como lo muestra la zona sombreada de la figura 4.

Figura 4:



$A \cap B$

EJEMPLO 7

Encuentre la intersección de los siguientes conjuntos.

(a) $\{3,4,5,6,7\}$ y $\{4,6,8,10\}$

Puesto que los elementos comunes a los dos conjuntos son 4 y 6,

$$\{3,\mathbf{4},5,\mathbf{6},7\} \cap \{\mathbf{4},\mathbf{6},8,10\} = \{\mathbf{4},\mathbf{6}\}.$$

(b)$\{9,14,25,30\}\ y\ \{10,17,19,38,52\}$

Estos dos conjuntos no tienen elementos en común, de modo que

$$\{9,14,25,30\} \cap \{10,17,19,38,52\} = \emptyset$$

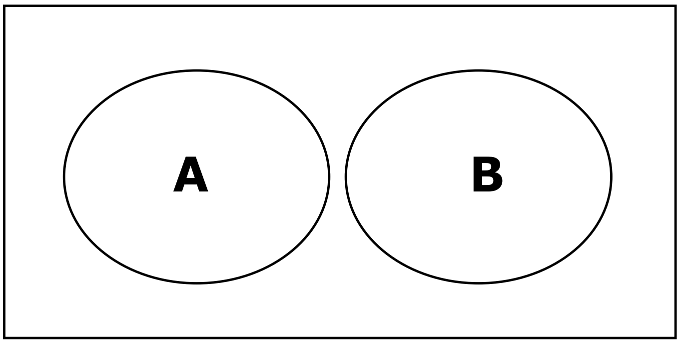
(c) $\{5,9,11\}\ y\ \emptyset$

No existen elementos en $\emptyset$, por lo que no puede haber elementos que pertenezcan a ambos conjuntos. Por lo tanto,

$$\{5,9,11\} \cap \emptyset = \emptyset$$

En los ejemplos 7(b) y 7(c) mostramos dos conjuntos que no tienen elementos en común. Los conjuntos que no tienen elementos en común reciben el nombre de **conjuntos disjuntos**. Un conjunto formado por perros y otro formado por gatos serían conjuntos disjuntos. En lenguaje matemático, los conjuntos A y B serán disjuntos siempre y cuando $A \cap B = \emptyset$. En la figura 5:

Figura 5:



UNIÓN DE CONJUNTOS

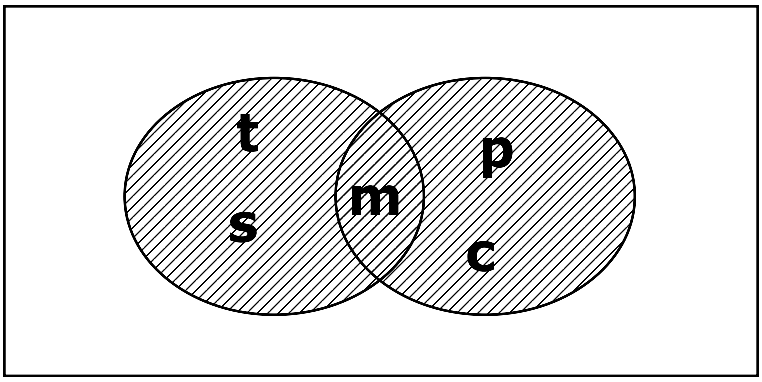
Al inicio de esta sección mostramos las listas de las promesas hechas por dos candidatos a formar parte del Consejo. Suponga que un encuestador quiere resumir, para su oficina, los tipos de promesas hechas por los candidatos. El encuestador necesitará analizar *todas* las promesas hechas por *uno u otro* candidato, o lo que es lo mismo, el conjunto

$$\{m, t, s, p, c\}$$

Es decir, la *unión* de los conjuntos de las promesas hechas por los candidatos, como se muestra en la zona sombreada en el diagrama de Venn en la figura 6. En símbolos,

$\{m, t, s\} \cup \{m, p, c\} = \{m, t, s, p, c\}$,

Figura 6:



Donde el símbolo en forma de u, ∪, denota la unión de los conjuntos. Es importante no confundir este símbolo con el de conjunto universal *U*.

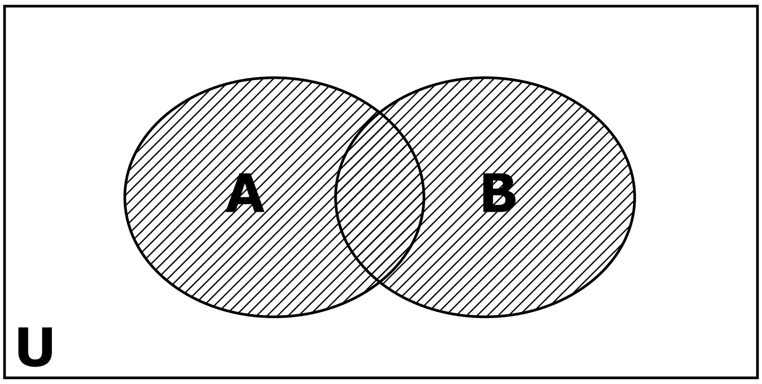
UNIÓN DE CONJUNTOS

La unión de los conjuntos A y B, que se escribe $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos, o

$$A \cup B = \{x | x \in A \ \ o \ \ x \in B\}$$

Forme la unión de los conjuntos A y B tomando los elementos de A y agregándole luego los elementos de B que no hayan estado antes en A, como lo muestra la zona sombreada en la figura 7.

Figura 7:



A ∪ B

<u>EJEMPLO 8</u>

Encuentre la unión de los siguientes conjuntos.

(a) $\{2,4,6\}$ y $\{4,6,8,10,12\}$

Comience por enumerar todos los elementos del primer conjunto, 2,4 y 6.Después liste los elementos del segundo conjunto que no estén en el primer conjunto; estos elementos son 8, 10 y 12.La unión está formada por todos estos elementos, o lo que es lo mismo,

$$\{2,4,6\} \ \cup \ \{4,6,8,10,12\} \ = \{2,4,6,8,10,12\}.$$

(b) $\{3,4,5\}\ \ y \ \ \emptyset$

Como el conjunto $\emptyset$ carece de elementos. La unión de $\{3,4,5\}$ con $\emptyset$ contiene sólo los elementos 3, 4 y 5 .Esto es:

$$\{3,4,5\} \ \cup \ \emptyset \ = \{3,4,5\}.$$

EJEMPLO 9

Sea $U = \{1,2,3,4,5,6,9\}$

$A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{2,4,6\}$

$C = \{1,3,6,9\}$

Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A' \cap B$

Primero identifique los elementos del conjunto *A*'; éstos son los elementos de U que no aparecen en el conjunto *A*:

$$A' = \{5,6,9\}$$

Ahora encuentre $A' \cap B$, o sea los elementos que pertenecen tanto a A' como a B :

$$A' \cap B = \{5,6,9\} \ \cap \ \{2,4,6\} = \{6\}$$

(b)$B' \cup C' = \{1,3,5,9\} \ \cup \ \{2,4,5\} = \{1,2,3,4,5,9\}$

(c) $A \ \cap \ (B \ \cup C')$

Primero encuentre el conjunto de los elementos dentro del paréntesis:

$B \ \cup C' = \{2,4,6\} \ \cup \{2,4,5\} = \{2,4,5,6\}$

Ahora, determine la intersección de este conjunto con *A*.

$A \ \cap \ (B \ \cup C') = A \ \cap \ \{2,4,5,6\} = \{1,2,3,4\} \ \cap \ \{2,4,5,6\} = \{2,4\}$

(d) $(A' \cup \ C') \ \cap B'$

El conjunto $A' = \{5,6,9\}$ y el conjunto $C' = \{2,4,5\}$, con

$$A' \cup C' = \{5,6,9\} \ \cup \ \{2,4,5\} = \{2,4,5,6,9\}$$

El conjunto $B' = \{1,3,5,9\}$ entonces

$$(A' \cup C') \ \cap B' = \{2,4,5,6,9\} \cap \{1,3,5,9\} = \{5,9\}$$

Con frecuencia se dice que las matemáticas son un “lenguaje”. Como tal, tiene la ventaja de contar con un simbolismo conciso. Por ejemplo, el conjunto $(A \cap B)' \cup C$ es menos difícil de entender que cuando se expresa en palabras. Un intento podría ser la siguiente: “El conjunto cuyos elementos no están en A y tampoco en B, o que están en C”. Las palabras claves aquí son *no, y, o*.

EJEMPLO 10

Describa con palabras cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A \cap (B \cup C')$

Este conjunto podría ser descrito como “el conjunto de todos los elementos que se encuentran en A, y se encuentran en B o no se encuentran en C ”.

(b) $(A' \cup C') \cap B'$

Una posibilidad es: “el conjunto de todos los elementos que no se encuentran en A o tampoco en C, y no están en B”.

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Otra operación de los conjuntos es la *diferencia* entre dos conjuntos. Suponga que

$A = \{1,2,3, \ldots ,10\}$ y $B = \{2,4,6,8,10\}$.Si los elementos de B son excluidos(o retirados) de A, se obtiene el conjunto $C = \{1,3,5,7,9\}$. A C se le denomina la diferencia entre los conjuntos A y B.

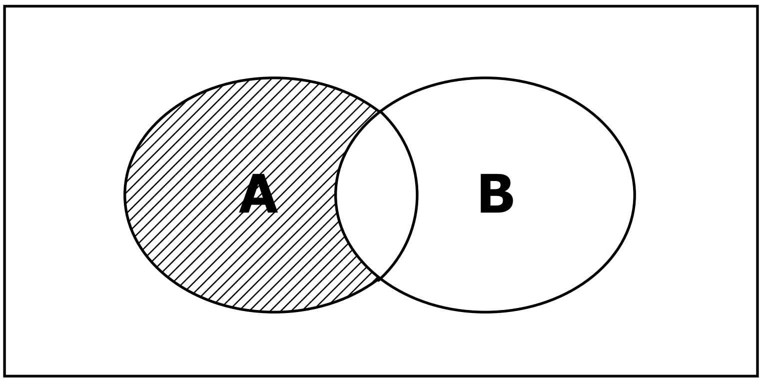
DIFERENCIA ENTRE CONJUNTOS

La **diferencia** entre los conjuntos A y B , que se escribe $A - B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B, o

$$A - B = \{x | x \in A \; y \; x \notin B\}$$

Puesto que $x \notin B$ significa lo mismo que $x \in B'$, el conjunto diferencia $A - B$ puede expresarse como $\{x | x \in A \; y \; x \in B'\}$, o $A \cap B'$. La figura 8 ilustra la idea de la diferencia entre dos conjuntos. La región sombreada representa $A - B$.

Figura 8:



A - B

EJEMPLO 11

Sean $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.
$A = \{1,2,3,4,5,6\}$.
$B = \{2,3,6\}$.
$C = \{3,5,7\}$.

Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A - B$

Comience con el conjunto A y elimine los elementos que también pertenezcan a B. Así,

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{2,3,6\} = \{1,4,5\}$$

(b) $B - A$

Para que un elemento se encuentre en $B - A$, deberá estar en B y no pertenecer a A.
Pero como todos los elementos de B están en A, entonces $B - A = \emptyset$.

Los resultados de los ejemplos 10(a) y 10(b) nos muestran que, en general,

$$A - B \neq B - A$$

EJERCICIOS

1. Relaciona cada conjunto de la columna I con la descripción que le corresponda de la columna II.

I

1. {2,4,6,8}

2. {x | x es un entero par mayor que 4 y menor que 6}

3. {…,-4,-3,-2,-1}

4. {…,-6,-4,-2,0,2,4,6,…}

5. {2,4,8,16,32}

6. {…,-5,-3,-1,1,3,5,…}

7. {2,4,6,8,10}

8. {1,3,5,7,9}

II

A. el conjunto de todos los enteros pares

B. el conjunto de las cinco menores potencias enteras positivas de 2

C. el conjunto de los enteros positivos pares menores que 10

D. el conjunto de todos los enteros impares

E. el conjunto de todos los enteros negativos

F. el conjunto de los enteros impares positivos menores que 10

G. $\emptyset$

H. el conjunto de los cinco menores múltiplos enteros positivos de 2 .

2. Diga si cada uno de los enunciados siguientes es verdadero o falso.

a) $3 \in \{2,5,6,8\}$

b) $b \in \{h,c,d,a,b\}$

c) $9 \notin \{6,3,4,8\}$

d) $\{k,c,r,a\} = \{k,c,a,r\}$

e) $\{5,8,9\} = \{5,8,9,0\}$

f) $\{x|x \text{ es un número natural menor que } 3\} = \{1,2\}$

3. ***Quemar calorías*** José Pérez cuida mucho su salud, aunque también le gusta cierto tipo de chocolate en barra, cada una de las cuales contiene 220 calorías. A fin de quemar las calorías superfluas, José participa en sus actividades favoritas, que se muestran a continuación, por periodos de una hora y nunca repite una actividad en un mismo día.

Actividad	**Símbolo**	**Calorías quemadas en una hora**
Voleibol	v	160
Golf	g	260
Canotaje	c	340
Nado	n	410
Carreras	r	680

a) Los lunes José sólo tiene tiempo para dos horas de actividades. Haga una lista de todos los conjuntos posibles de actividades con las que quemaría al menos el número de calorías correspondientes a tres barras de chocolate.

b) Suponga que José tiene tiempo para tres horas de actividades el sábado .Haga una lista de todos los conjuntos de actividades con las que quemaría al menos el número de calorías de cinco barras de chocolates.

4. Determine si $\subset$, $\subseteq$, ambos o ninguno , deben colocarse en el espacio en blanco para que la proposición sea verdadera.

a) $\{B, C, D\} ----\{B, C, D, F\}$
b) $\{9,1,7,3,5\} ----\{1,3,5,7,9\}$
c) $\emptyset ----\ \{0\}$
d) $\{-1,0,1,2,3\} ----\{0,1,2,3,4\}$
e) $\emptyset ----\emptyset$

5. Realice las siguientes operaciones.
Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
$X = \{a, c, e, g\}$,
$Y = \{a, b, c\}$,
$Z = \{b, c, d, e, f\}$

a) $X \cap Y$
b) $Y \cup Z$
c) $X \cup U$
d) $Y \cap U$
e) X'
f) $X' \cap Y'$
g) $X \cup (Y \cap Z)$
h) $(Y \cap Z') \cup X$
i) $(Z \cup X')' \cap Y$
j) $X - Y$
k) $X' - Y$
l) $X \cap (X - Y)$

6. ***Efectos negativos del alcohol y el tabaco*** La tabla muestra los efectos negativos del uso prolongado del tabaco y el alcohol.

TABACO	***ALCOHOL***
Enfisema, *e* Daño al corazón , *h* Cáncer, *c*	Daño al hígado , *l* Daño al celebro, *b* Daño al corazón , *h*

Sea T el conjunto de todos los efectos producidos por el uso del tabaco y A el conjunto de los efectos producidos por el alcohol
a) el conjunto universal más pequeño posible, *U*, que incluya a todos los efectos mencionados
b) A' c) T' d) $T \cap A$ e) $T \cup A$ f) $T \cap A'$

7. Sea *U = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos,*
A = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos pormenorizadas,
B = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos mostrando los ingresos del negocio,
C = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos archivadas en el 2003,

D = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos seleccionadas para una auditoría.

Describa con palabras cada uno de los conjuntos.

a) $B \cup C$ b) $A \cap D$ c) $C - A$ d) $D \cup A'$ e) $(A \cup B) - D$

f) $(C \cap A) \cap B'$

8. Los profesores de gimnasia de la Escuela 314 quieren armar, para una competencia, un equipo de fútbol de jugadores entre 14 y 16 años y uno de básquet de jugadores entre 15 y 17. Para armar los equipos, la dirección del colegio les entregó una lista con los alumnos entre 14 y 16 años y otra con los alumnos entre 15 y 17.
   Para citar a los alumnos a que se prueben, los profesores quieren armar cuatro listas formadas por los alumnos que pueden: 1) integrar ambos equipos, 2) integrar alguno de los equipos, 3) integrar sólo el equipo de fútbol, 4) integrar sólo el equipo de básquet.
   Si llamamos A al conjunto de alumnos entre 14 y 16 años y B al conjunto de alumnos entre 15 y 17, describir las listas 1), 2) , 3), y 4) en términos de operaciones entre A y B.

9. Una orquesta O tiene los siguientes subconjuntos:

   A es el conjunto de los miembros varones

   B es el conjunto de los miembros casados

   C es el conjunto de los que tocan instrumentos de cuerda.

   Describir en palabras los casos: A', B', C', $A \cap B$, $A \cap C$; $B' \cap C$, $A \cup B'$, $B \cup C'$, $B' \cup C'$. Representar el diagrama de Venn.

   ¿En qué regiones encontramos: a los varones solteros que tocan un instrumento de cuerda, b) las mujeres casadas que tocan un instrumento de cuerda, c) los solteros que tocan el trombón, y d) las mujeres solteras que tocan el oboe?

10. *A, B, C, D y E* son cinco hombres de diferentes nacionalidades. *A, C* y *E* hablan inglés, *B* y *D* hablan alemán, *A* y *D* hablan francés, *B* y *E* hablan español y *C* habla ruso.
    ¿Quién habla inglés y español? ¿Quién habla inglés y francés? ¿Pueden entenderse *A* y *D*? ¿Y *D* y *E*? ¿Y *A, B* y *D*? ¿Y *A* y *C*?

11. Estudiar: $A' \cap B'$ y $A' \cup B'$ y comparar con $(A \cup B)'$ y $(A \cap C)'$ respectivamente.

12. Dibujar un diagrama de Venn para el conjunto de todos los triángulos y los subconjuntos

    H = {triángulos escalenos}

    I = {triángulos isósceles}

    K = {triángulos equiláteros}

    L = {triángulos acutángulos}

    M = {triángulos rectángulos}

    N = {triángulos obtusángulos}

¿Puede considerarse que un triángulo equilátero es isósceles? ¿Puede ser rectángulo un triángulo escaleno? ¿Puede ser equilátero un triángulo rectángulo? (Consultar la definición en www.rae.es)

13. Dibujar un diagrama de Venn para P = {todos los paralelogramos}, Q = {rombos}, R = {rectángulos}, S = {cuadrados}

14. El cuerpo de bomberos, quiere enviar folletos sobre el riesgo del fuego a todos los profesores y todos los propietarios de casas de la ciudad. En base a las cifras que se ofrecen, ¿cuántos folletos necesitan? Utiliza el diagrama de Venn para solucionar este problema.

    Propietarios de casa…………………….. 50.000
    Profesores………………………………..….4.000
    Profesores propietarios de casas………...3.000

15. El gobierno quiere contactar con todos los farmacéuticos, todos los propietarios de armerías y todos los padres de familia de la ciudad. ¿Con cuántas personas tiene que contactar a partir de los siguientes datos?

    Farmacéuticos……………………………………… 10
    Propietarios de armerías…………………………… 5
    Padres de familia……………………………….. 3000
    Farmacéuticos propietarios de armerías………...0
    Farmacéuticos que son padres de familia………...7
    Propietarios de armerías que son padres…………3

Gottfried Leibniz (1646-1716) fue un gran filósofo y sabio de proyección universal que realizó notables intentos por conciliar los conflictos entre católicos y protestantes. Promovió el intercambio cultural entre Europa y Oriente. Los ideogramas chinos lo indujeron a buscar un simbolismo universal.

Leibniz fue uno de los primeros creadores de la lógica simbólica y busco construir un modelo totalmente objetivo para el razonamiento humano que redujera todos los errores de razonamientos a simples fallas de cálculo. Hasta ahora, su sueño sigue siendo una ilusión.

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

Proposiciones y cuantificadores:

Proposiciones: Una proposición se define como una aseveración que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas. Por ejemplo, los dos enunciados siguientes son proposiciones:

El correo electrónico constituye un medio de comunicación.

$$11 + 6 = 12$$

Cada una puede ser verdadera o falsa. Sin embargo, con base en esta definición, las oraciones siguientes no son proposiciones:

Pinta la pared.

¿No crees que hoy sea un gran día?

Diego Maradona es mejor jugador de fútbol que Lionel Messi.

Esta oración es falsa.

No se puede determinar si estas oraciones son verdaderas o falsas. La primera es una orden y la segunda es una pregunta. La tercera es una opinión. "*Esta oración es falsa"* es una paradoja; si suponemos que es verdadera, entonces es falsa, y si suponemos que es falsa, entonces es verdadera.

Una **proposición compuesta** puede formarse por la combinación de dos o más proposiciones. Las proposiciones que forman parte de una proposición compuesta reciben el nombre de **componentes de la proposición.** Para crear proposiciones compuestas pueden usarse varios **conectivos lógicos**, o simplemente **conectivos.** Para palabras como *y* , *o, no y si….entonces* son ejemplos de conectivos.

Ejemplo 1: Determine si cada proposición es compuesta o no.

a) *Shakespeare escribió sonetos y el poema tiene la*

TEST LOGIC

1:=

2:≠

3:>

4: ≥

5: <

6: ≤

El menú TEST de la calculadora TI-83 Plus permite al usuario probar la veracidad o falsedad de proposiciones que incluyen =, ≠,>, <, ≤ y ≥. Si una proposición es verdadera el resultado es 1; si es falsa el resultado es 0.

```
4 < 9
                1
4 > 9
                0
```

4 < 9 es verdadero, como lo indica el 1, 4 > 9 es falso, como lo indica el 0.

forma de pentámetro yámbico.

Este enunciado es compuesto, ya que está constituido de las proposiciones componentes *tiene la forma de pentámetro yámbico"*. El conectivo es ***y***.

b) *Puede pagarme ahora o puede pagarme después.*

Aquí el conectivo es *o*. La proposición es compuesta.

c) *Si él lo dijo, entonces debe ser cierto.*

En este caso, el conectivo es *si…..entonces*. La proposición es compuesta.

d) *Mi pistola fue fabricada por Smith y Wesson*.

Aunque en esta proposición aparece la palabra "y", no está siendo utilizado como conectivo *lógico*, ya que es parte del nombre del fabricante. La proposición no es compuesta.

Negaciones: La oración "Juan Jones tiene un automóvil rojo" es una proposición; la negación de esta proposición es "Juan Jones no tiene un automóvil rojo". La negación de una proposición verdadera es falsa y la negación de una proposición falsa es verdadera.

Ejemplo 2: Construya la negación de cada proposición.

a) Ese estado tiene un gobernador.

Para negar la proposición, introducimos no en la oración: "Ese estado no tiene un gobernador".

b) El Sol no es una estrella.

Negación: "El Sol es una estrella".

Una manera de detectar negaciones incorrectas es verificar el valor de verdad. Una negación tiene el valor de verdad contrario al de la proposición original.

El ejemplo siguiente utiliza algunos símbolos de desigualdad tomados del algebra.

Simbolismo	**Significado**	**Ejemplos**
$a < b$	a es menor que b	4 < 9, ½ < ¾
$a > b$	a es mayor que b	6 > 2 , -5 > -11
$a \leq b$	a es menor o igual a b	8 ≤ 10 , 3 ≤ 3
$a \geq b$	a es mayor o igual a b	-2 ≥ −3, -5 ≥ -5

Ejemplo 3: Proporcione la negación de cada desigualdad.

a) $p < 9$

La negación de "p es menor que 9" es "p no es menor que 9". Como no podemos utilizar "no", lo cual requeriría escribir $p \nless 9$, parafraseamos la negación como "p es mayor o igual a 9", o $p \geq 9$.

b) $7x + 11y \geq 77$

La negación es, $7x + 11y < 77$.

Símbolos: Para simplificar el manejo de la lógica, se utilizan símbolos. Las proposiciones se representan con letras, como p , q o r, mientras que los conectivos se representan con símbolos, algunos de los cuales se muestran en la tabla siguiente. La tabla también indica el tipo de proposición compuesta que corresponde al conectivo dado.

Conectivo	Símbolo	Tipo de proposición
Y	$\wedge$	Conjunción
O	$\vee$	Disyunción
No	$\sim$	Negación

Ejemplo 4: Sean p que representa "Hoy estamos a 80º F" y q que representa "Hoy es martes". Transcriba cada proposición simbólica en palabras.

a) $p \vee q$. Según la tabla, $\vee$ simboliza o, asi $p \vee q$ representa: Hoy estamos a 80º F u hoy es martes.
b) $\sim p \wedge q$: Hoy no estamos a 80º F y hoy es martes.
c) $\sim (p \vee q)$: No es el caso que hoy estemos a 80º F o que sea martes.
d) $\sim (p \wedge q)$: No es el caso que hoy estemos a 80º F y hoy sea martes.

Cuantificadores: Las palabras *todo, cada uno*, *todos* y ninguno se denominan **cuantificadores universales**, mientras que las palabras y frases como *hay* y *al menos uno* se conocen como **cuantificadores existenciales**. Los cuantificadores son muy usados en matemáticas para indicar *cuántos* casos existen de una situación determinada. Tenga cuidado al construir la negación de proposiciones que incluyan cuantificadores.

Si una proposición es verdadera, su negación debe ser falsa y viceversa, debe ser verdadera si la proposición dada es falsa, en todos los casos posibles. Considere la proposición:

Todas las niñas en el grupo se llaman Mary.

Muchas personas escribirán la negación de esta proposición como "Ninguna niña en el grupo se llama Mary" o "Todas las niñas en el grupo no se llaman Mary". Pero esto no sería correcto. Para determinar por qué, analice los tres grupos a continuación.

Grupo I: Mary Jones, Mary Flores, Mary Morales.

Grupo II: Mary Moreno, Betty Gómez, Margarita Carrizo.

Grupo III: Lucia Garbarino, Paula Soto, Romina Reyes.

Estos Grupos contienen todas las posibilidades que deben considerarse. En el grupo I, todas las niñas se llaman Mary, en el grupo II, algunas niñas tienen por nombre Mary (y algunas no) y en el grupo III, ninguna niña se llama Mary. Vea los valores de verdad en el diagrama y tenga presente que "alguna" significa "al menos una (y posiblemente todas)".

Valores de verdad cuando se aplica a:

	Grupo I	Grupo II	Grupo III
(1) Todas las niñas en el grupo se llaman Mary (Proposición)	V	F	F
(2) Ninguna niña en el grupo se llama Mary (Posible negación)	F	F	V
(3) Todas las niñas en el grupo no se llaman Mary (Posible negación)	F	F	V
(4) Algunas niñas en el grupo no se llaman Mary (Posible negación)	F	V	V

La negación de la proposición dada (1) debe tener valores de verdad contrarios en *todos* los casos. Puede verse que las proposiciones (2) y (3) no satisfacen esta condición (para el grupo II) pero la proposición (4) sí la cumple. Puede concluirse que la negación correcta para "Todas las niñas en el grupo se llaman Mary" es "Algunas niñas en el grupo no se llaman Mary". Otras formas de enunciar la negación son:

No todas las niñas en el grupo se llaman Mary.

No es el caso que todas las niñas en el grupo se llaman Mary.

Al menos una niña en el grupo no se llama Mary.

La tabla siguiente puede usarse para generalizar el método de determinar la negación de una proposición que incluya cuantificadores.

Negación de proposiciones con cuantificadores

Proposición	Negación
Todos cumplen.	Algunos no cumplen (de forma equivalente. No todos cumplen)
Algunos cumplen.	Ninguno cumple (de forma equivalente. Todos no cumplen).

La negación de la negación de una proposición es la proposición misma. Por ejemplo, las negaciones en la columna Negación son simplemente las proposiciones originales correspondientes de la columna Proposición. Es decir, la negación de "Algunos no cumplen" es "Todos cumplen".

Ejemplo 5: Escriba la negación de cada proposición.

a) Algunos gatos tienen pulgas.

Ya que algunos significa "al menos uno", la proposición "Algunos gatos tienen pulgas" en realidad es lo mismos que "Al menos un gato tiene pulgas". La negación de esto es "Ningún gato tiene pulgas".

b) Algunos gatos no tienen pulgas.

Esta proposición afirma que al menos un gato, en algún lugar, no tiene pulgas. La negación de esto es "Todos los gatos tienen pulgas".

c) Ningún gato tiene pulgas.

La negación es: "Algunos gatos tienen pulgas".

***Ejemplo 6*:** Determine si cada una de las proposiciones siguientes acerca de los conjuntos de números, las cuales incluyen un cuantificador es verdadera o falsa.

a) Existe un entero no negativo que no es un número natural.

Puesto que tal numero existe (es el 0), esta proposición es verdadera.

b) Todo número entero es un número natural.

Esta proposición es falsa, ya que podemos encontrar al menos un entero que no es un número natural. Por ejemplo, -1 es un entero pero no es un número natural. (Hay un número infinito de elecciones que hubiéramos podido hacer).

c) Todo número natural es un número racional.

Ya que todos los números naturales pueden escribirse como una fracción con denominador 1, esta proposición es verdadera.

d) Existe un número irracional que no es real.

Para poder ser un número irracional, un número primero debe ser real. Por lo tanto, como no podemos proporcionar un número irracional que no sea real, esta proposición es falsa.

ACTIVIDADES:

1) Determine si cada una de las oraciones siguientes es o no una proposición.

1. El 7 de diciembre de 1941 fue domingo.
2. El código postal de Comodoro Rivadavia, en Argentina, es 9003.
3. Pongan atención, mis niños: van a escuchar sobre la cabalgata que Paul Revere hizo a medianoche.
4. Ceda el paso al tráfico en sentido contrario.
5. $5 + 8 = 13$ y $4 - 3 = 1$.
6. Algunos números son negativos.
7. Los accidentes son la principal causa de muerte entre los niños menores de 8 años.
8. ¿A dónde iras hoy?
9. Un galón de leche pesa más de 4 libras.

2) Determine si cada una de las proposiciones siguientes es compuesta.

1. Mi hermano contrajo matrimonio en Londres.
2. Mañana será domingo.
3. María Laura es menor de 20 años y también lo es Gabriela.
4. Si Julia vende su cuota, entonces Juan estará feliz.
5. Si Mike es un político, entonces Julián es un ladrón.
6. A la esposa de Juan Cruz le gusta el helado de Grido y Del Viento.

3) Escriba la negación de cada una de las proposiciones.

1. El nombre de su tía es Lucia.
2. Se regarán las flores.
3. Cada perro tiene su día.
4. Hoy no llovió en el sur de Buenos Aires.
5. Algunos libros son más extensos que este libro.
6. Todos los estudiantes presentes tendrán otra oportunidad.
7. Ningún técnico en computación puede jugar *black jack.*
8. Todo el mundo ama a alguien en algún momento.

4) *Proporcione una negación para cada desigualdad.*

1. $y > 12$.
2. $q \geq 5$.
3. $x < -6$.
4. $r \leq 9$.

5) *Sea que p representa la proposición "Cristina colecciona videocintas" y q representa la proposición "Juan toca la tuba". Transforme cada una de las siguientes proposiciones compuestas en símbolos.*

1. Cristina colecciona videocintas y Juan no toca la tuba.
2. Cristina no colecciona videocintas o Juan no toca la tuba.
3. Cristina no colecciona videocintas o Juan toca la tuba.
4. Juan toca la tuba y Cristina no colecciona videocintas.
5. Ni Cristina colecciona videocintas ni Juan toca la tuba.
6. O bien Juan toca la tuba o Cristina colecciona videocintas y no es el caso que a la vez Juan toque la tuba y Cristina coleccione videocintas.

6) *Utilizando las siguientes proposiciones, traduzca a lenguaje coloquial*:

p: Mary está navegando en internet.
q: Mary está estudiando.
r: Mary está en su casa.

a) $\sim p \wedge \sim q$ b) $p \vee (q \wedge r)$ c) $\sim(\sim q \wedge r)$ d) $(\sim p \wedge q) \vee \sim r$

7) *Observe los grupos de obras de arte A, B y C e identifique con letras el grupo o los grupos que satisfagan las proposiciones siguientes, las cuales incluyen cuantificadores.*

A

B

C

1. Todas las pinturas tienen marco.
2. Ninguna pintura tiene marco.
3. Al menos una pintura no tiene marco.
4. Al menos una pintura tiene marco.
5. Ninguna pintura no tiene marco.
6. Todas las pinturas no tienen marco.

8) *Determine si cada una de las proposiciones, las cuales incluyen cuantificadores es verdadera o falsa.*
   1. Todo entero no negativo es un entero.
   2. Todo número natural es un entero.
   3. Existe un número racional que no es un entero.
   4. Todos los números racionales son números reales.
   5. Todos los números irracionales son números reales.
   6. Algunos números racionales no son enteros.
   7. Cada entero no negativo es un número positivo.
   8. Cada número racional es un número positivo.

9) *Escriba la proposición siguiente utilizando "cada".*

   No hay alguien aquí que no haya hecho eso en un momento u otro.

10) *Colocar V o F*
   1. 31 es un número primo y 36 es un cuadrado perfecto.
   2. $5 \mid 35$ ó 197 es múltiplo de 3.
   3. 13 es un número primo ó un número impar.
   4. n es un número primo entonces n es un número impar.
   5. $3 \mid 60$ y 8 no divide a 40.

11) Amelia, Beatriz y Carlos son tres profesores que enseñan matemática, historia y geografía, no necesariamente en ese orden. El que enseña geografía es el mejor amigo de Beatriz y el menor de los tres. Amelia es mayor que el de Historia.
¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

1. Carlos es el mayor.
2. Carlos enseña geografía.
3. El de matemática es mayor que Amelia.

12) Cinco personas rinden un examen. Si se sabe que:

B obtuvo un punto más que D.

D obtuvo un punto más que C.

E obtuvo dos puntos menos que D.

B obtuvo dos puntos menos que A.

¿Quién obtuvo el mayor puntaje?

TEORIA DE NÚMEROS

En el mundo actual, la información es un recurso valioso. Muchas empresas y organismos gubernamentales deben guardar cierto tipo de información en secreto. Los códigos se utilizan para comunicar de manera segura información clasificada de tal suerte que debe decodificarse antes para que pueda ser comprendida. Es esencial que un código sea fácil de utilizar, pero muy difícil de violar. Uno de los códigos más ampliamente utilizados en la industria fue desarrollado por Ronald L. Rivest, Adi Shamir y Leonard M.Adleman. Conocido como código RSA por las iniciales de sus tres coinventores, empieza por cambiar el mensaje que ha de codificarse por un número grande M. Después M, se transforma en un número diferente C mediante la fórmula

$$C = M^k \ (mod\, n)$$

Los números n y k se ponen a disposición de todos, por lo que cualquiera puede codificar un mensaje. Por esta razón, RSA se denomina un sistema de "clave pública". Sin embargo, la única manera conocida para decodificar C en M es factorizar primero n en dos factores primos únicos, p y q (que son conocidos por quien eligió originalmente n , pero por nadie más).

Cuando en 1977 se introdujo el código RSA, Rivest desafió a los investigadores a que decodificaran un mensaje que una n con 129 dígitos. Se había estimado que, sin conocimiento alguno de p y q, se llevaría aproximadamente 20.000 años en descifrar este mensaje. Sin embargo, con ayuda de la teoría de los números, a 600 matemáticos de 25 países diferentes les tomó sólo 17 años factorizar n en números primos de 64 y 65 dígitos. El mensaje descodificado decía: "Las palabras mágicas son fastidiosas osífragas ".

En la actualidad, se deben factorizar números aún más grandes. Pero en lugar de involucrar a numerosos matemáticos, ahora el esfuerzo incluye a muchas computadoras, en un proceso denominado "cómputo distribuido". Varias computadoras, comparten la tarea para obtener un resultado en un tiempo razonable.

En ocasiones, las técnicas avanzadas favorecen la invención de códigos, pero también pueden favorecer a aquellos que tratan de descifrarlos. Por lo que se desata una competencia entre diseñadores de códigos y descifradores de códigos.

El famoso matemático alemán Carl Friedrich Gauss comentó una vez: "La matemática es la reina de las ciencias, y la teoría de números es la reina de las matemáticas". El presente trabajo gira en torno al estudio de esta teoría. La teoría de los números es la rama de las matemáticas dedicada al estudio de las propiedades de los números naturales (esto es, el conjunto infinito de números 1, 2, 3, 4, … , que también se conocen como números de conteo).

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Trabajaremos con conjunto de **números naturales**, también llamados **números de conteo** o **enteros positivos**:

$$\{1, 2, 3,\ldots\}.$$

La teoría de los números trata del estudio de las propiedades de este conjunto de números, y un concepto clave de esta teoría es la *divisibilidad*. Hablando informalmente, decimos que un número natural es *divisible* entre otros si, al dividir el primero entre el segundo, se obtiene un residuo de 0. Esto puede definirse formalmente como sigue:

Divisibilidad

El número natural a es **divisible** entre el número natural b si existe un número natural k tal que $a = bk$. Si b divide a a, entonces, para indicarlo, escribimos $b \mid a$.

Observe que si b divide a a, entonces el cociente a / b es un número natural. Por ejemplo, 4 divide a 20 ya que existe un número natural k tal que $20 = 4k$. Aquí el valor de k es 5, puesto que $20 = 4 . 5$. (En este caso se utiliza el punto para la multiplicación). Por ejemplo, el número 20 no es divisible entre 7, pues no existe número natural k que satisfaga $20 = 7k$. La alternativa sería pensar: "20 dividido entre 7 da un cociente de 2 con residuo de 6", pero como hay un residuo diferente de cero, no se cumple la divisibilidad. Escribimos $7 \nmid 20$ para indicar que 7 no divide a 20.

Si el número natural a es divisible entre el número natural b, entonces b es un **factor** (o **divisor**) de a, y a es un **múltiplo** de b. Por ejemplo, 5 es un factor de 30, y 30 es un múltiplo de 5. También, 6 es un factor de 30, y 30 es un múltiplo de 6. El número 30 es igual a 6 . 5; este producto 6 . 5 se denomina **factorización** de 30. Otras factorizaciones de 30 incluyen 3 . 10, 2 . 15, 1 . 30 y 2 . 3 . 5.

Las ideas de números naturales pares e impares se basan en el concepto de divisibilidad. Un número natural es par si es divisible entre 2, e impar si no es divisible entre 2.

EJEMPLO 1

Decida si el primer número en cada pareja es divisible entre el segundo.

(a) 45; 9

¿Hay un número natural k que satisface $45 = 9k$? La respuesta es sí, ya que $45 = 9 . 5$, y 5 es un número natural. Por lo tanto, 9 divide a 45, que se denota así $9 \mid 45$.

Violación de códigos

La determinación de factores primos de números muy grandes había sido considerada un simple ejercicio para computadora, interesante para el mejoramiento de los métodos de trabajo con estas máquinas, pero sin ningún valor por derecho propio. Esto ha cambiado en años recientes debido a los nuevos métodos de *codificación*, en los que se utilizan números muy grandes a fin de intentar conseguir códigos inviolables para la información computarizada. Tan pronto como se aplican estos números, aparecen quienes tratan de encontrar factores primos que permitan descifrar el código.

En un artículo de la *Science News* del 7 de mayo de 1994 ("Team Sieving Cracks a Huge Number", p.292) se informó que el mensaje codificado propuesto por Rivest 17 años antes había sido descifrado (Vea la introducción del tema). El número clave de 129 dígitos, conocido como RSA-129, había sido factorizado por el método de la criba cuadrática (QS, por sus cifras en inglés), con más de 600 computadoras que trabajan en conjunto. Aquí está el número y sus dos factores:

114.381.625.757.888.669.235.779.
976.146.612.010.218.296.721.242.
362.562.561.842.935.706.935.245.
733.897.830.597.123.563.958.705.
058.989.075.147.599.290.026.879.
543.541 =
3.490.529.510.847.650.949.147.84
9.619.903.898.133.417.764.638.49
3.387.843.990.820.577 x
32.769.132.993.266.709.549.961.9
88.190.834.461.413.177.642.967.9

(b) 60; 7

Como el cociente $60 \div 7$ no es un número natural, 60 no es divisible entre 7, y se escribe

$7 \nmid 60.$

(c) 19; 19

El cociente $19 \div 19$ es el número natural 1, de modo que 19 es divisible entre 19. (De hecho, cualquier número natural es divisible entre él mismo y también entre 1.)

(d) 26; 1

El cociente $26 \div 1$ es el número natural 26, así 26 es divisible entre 1. (En realidad, cualquier número es divisible entre 1. Con frecuencia esto se olvida.)

Las observaciones realizadas en los incisos (c) y (d) del ejemplo 1 pueden generalizarse como sigue: Para cualquier número natural a, $a \mid a$ y $1 \mid a$.

EJEMPLO 2

Encuentre los factores de cada número.

(a) 36

Para determinar los factores de 36, comience por tratar de dividir 36 entre 1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6, etc. Al hacerlo, se obtiene la lista siguiente de factores de 36:

1,2,3,4,6,9,12,18 y 36.

(b) 50

Los factores de 50 son 1,2,5,10,25 y 50.

(c) 11

Los únicos factores de 11 son 11 y 1.

Al igual que el número 19 en el ejemplo1(c), el número 11 sólo tiene dos factores, el número mismo y 1. Ésta es una clave muy importante de números naturales, denominada *número primo*.

Cómo utilizar grandes cantidades de tiza

En 1903, mucho antes de la época de las computadoras, el matemático F. N. Cole presentó en una reunión de la Sociedad Estadounidense de Matemáticas (American Mathematical Socioely) su descubrimiento de una factorización del número

$$2^{67} - 1$$

Caminó hasta la pizarra, obtuvo la potencia 67 de 2 y luego le restó 1. Después se desplazó hacia el otro lado de la pizarra y multiplicó

193.707.721 x 761.838.257.287.

Los dos cálculos coincidían , y Cole fue ovacionado de pie por una presentación que no incluía una sola palabra.

Números primos y compuestos

Un número natural mayor que 1 que sólo tiene el número mismo y 1 como factores se denomina **número primo**.

Un número natural mayor que 1 que no es primo se llama **compuesto**.

Los matemáticos han acordado que el número natural 1 no es primo ni compuesto. La siguiente definición alterna de número primo aclara que 1 no es primo.

Definición alterna de un número primo

Un **número primo** es un número natural que tiene *exactamente* dos factores diferentes.

Esta definición alternativa excluye la posibilidad de que 1 sea primo, ya que 1 tiene un solo factor(a saber, 1).

Hay un método sistemático para identificar números primos en una lista de números: 2, 3, … , n. El método, conocido como **Criba de Eratóstenes**, se denomina así en honor del geógrafo, poeta, astrónomo y matemático griego, que vivió hacia el 276 al 192 a.C. Para construir tal criba, haga una lista de todos los números naturales desde 2 hasta algún número natural dado, como 100. El número 2 es primo, pero todos los demás múltiplos de 2 (4,6,8,10,etc.) son compuestos. Como 2 es primo, enciérrelo en un círculo, y tache todos los demás múltiplos de 2. Como 3 es primo, debe encerrarlo en un círculo, mientras que los demás múltiplos de 3 (6,9,12,15, etc.) que no están tachados debe tacharlos. Encierre en un círculo el siguiente número primo que es 5, mientras que los demás múltiplos de 5 se tienen que tachar. Encierre en un círculo al 7, y tache todos los demás múltiplos de 7. Continúe este proceso para todos los primos menores o iguales a la raíz cuadrada del último número en la lista. Para esta lista, puede detenerse en 7, ya que el siguiente número primo, 11, es mayor que la raíz cuadrada de 100, que es 10.La tabla 1 da la Criba de Eratóstenes para 2,3,4, …, 100, en la que se identifican los 25 primos en ese rango. En teoría, tal criba se puede construir para cualquier valor de *n*.

TABLA 1 **CRIBA DE ERASTÓSTENES**

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

EJEMPLO 3 Utilice las definiciones de números primos y compuestos para decidir si cada número es primo o compuesto.

(a) 97

Como los únicos factores de 97 son 97 y 1, el número 97 es primo.

(b) 59.872

El número 59.872 es par, de modo que es divisible entre 2. Es compuesto. (Solamente hay un número primo par, el número 2.)

(c) 697

Para que 697 sea compuesto, debe haber un número diferente de 697 y de 1 que lo divida con residuo cero. Comenzaremos probando con 2, y luego con 3. Ninguno funciona. No hace falta intentarlo con 4. (Si 4 divide a un número, entonces 2 también lo dividirá). Inténtelo con 5. No es necesario probar con 6 o cualquier par subsiguiente. (¿Por qué?) Inténtelo con 7, luego con 11. (¿Por qué no con 9?) Pruebe con 13. Siga intentándolo con números hasta que funcione, o hasta que lo intente con un número cuyo cuadrado exceda a tal número. Inténtelo con 17:

$$697 \div 17 = 41.$$

El número 697 es compuesto.

Hay una ayuda para determinar si un número natural es divisible entre otro número natural que se conoce como **prueba de divisibilidad**. Existen algunas de estas pruebas para números naturales pequeños, y se dan en la tabla 2. Las pruebas de divisibilidad para 7 y 11 son un poco complicadas, pero se estudian en los ejercicios planteados.

Prueba de divisibilidad entre 11.

a) *Iniciando a la izquierda del número dado, obtenga la suma de los dígitos tomados de manera alternada, es decir uno sí y otro no.*
b) *Sume los dígitos que no sumó en el paso anterior.*
c) *Reste la más pequeña de las suma de la mayor. (si las sumas son iguales, la diferencia es 0).*

d) *Si el número final obtenido es divisible entre 11, entonces el número dado también es divisible entre 11. Si el número final no es divisible entre 11, entonces tampoco lo será el número dado.*

Utilice esta prueba de divisibilidad para determinar si cada uno de los siguiente números es o no divisible entre 11.

1) $\underline{8}.4\underline{9}3.\underline{9}6\underline{9}$

8+9+9+9= 35

4+3+6 = 13

35 - 13= 22

$11 \mid 22$

$11 \mid 8.493.969$

2) $4\underline{5}3.8\underline{9}6.\underline{2}4\underline{8}$

4+3+9+2+8= 26

5+8+6+4= 23

26 -23 = 3

$11 \nmid 3$

$11 \nmid 453.896.248$

TABLA 2 Criterios de divisibilidad

Divisible entre	Criterio	Ejemplo
2	El número termina en 0, 2, 4, 6 u 8.(El último dígito es par)	9.489.994 termina en 4; es divisible por 2
3	La suma de los dígitos es divisible entre 3.	897.432 es divisible entre 3, ya que 8+9+7+4+3+2=33 es divisible entre 3
4	Los últimos dos dígitos forman un número divisible entre 4	7.693.432 es divisible entre 4, ya que 32 es divisible entre 4.
5	El número termina en 0 o 5.	890 y 7.635 son divisible entre 5
6	El número es divisible entre 2 y 3	27.342 es divisible entre 6 puesto que es divisible entre 2 y entre 3.
8	Los últimos tres dígitos forman un número que es divisible entre 8.	1.437.816 es divisible entre 8, ya que 816 es divisible entre 8.
9	La suma de los dígitos es divisible entre 9.	428.376.105 es divisible entre 9 ya que la suma de sus dígitos es 36, que es divisible entre 9.
10	El último dígito es 0.	897.463.940 es divisible entre 10.
12	El número es divisible entre 4 y 3.	376.984.032 es divisible entre 12.

EJEMPLO 4 Decida si el primer número es divisible entre el segundo.

(a) 2.984.094; 4

Los últimos dos dígitos forman el número 94. Como 94 no es divisible entre, el número dado no es divisible entre 4.

(b) 4.119.806.514; 9

La suma de los dígitos es 4+1+1+9+8+0+6+5+1+4 = 39, que no es divisible entre 9. Por lo tanto, el número dado no es divisible entre 9.

El siguiente programa puede utilizarse en la calculadora TI-83 para listar todos los primos menores o iguales a un número natural dado N. Fue escrito por Charles W. Gantner y es cortesía de Texas Instruments.

```
PROGRAM: PRIMES
Disp "INPUT  N ≥ 2"
Disp"TO GET"
Disp"PRIMES ≤ N
Input N
2→T
Disp T
1→A
Lb1  1
A + 2 →A
3→B
If  A > N
Stop
Lb1 2
If  B ≤ √(A)
Go to 3
Disp A
Pause
Go to 1
Lb1 3
If  A / B ≤ int( A/ B)
Go to 1
B + 2 →B
Go to 2
```

Como se mencionó, a un número como 15, que puede escribirse como el producto de factores primos (15 = 5 . 3), se le denomina número *compuesto*. Un importante teorema en matemáticas establece que sólo hay una forma posible de escribir la factorización prima de un número compuesto natural. Este teorema se conoce como *teorema fundamental de la aritmética*, una forma de las cuales conocían los antiguos griegos.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

Todo número natural compuesto puede expresarse en una sola forma como producto de primos (si no se considera el orden de los factores)

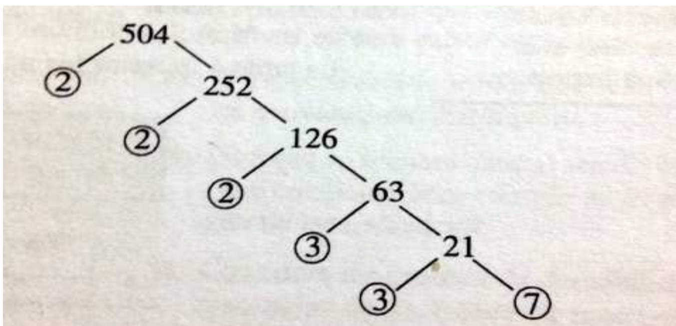
Algunas veces, a este teorema se le denomina **teorema de la factorización única** para reflejar la idea de que sólo hay una (única) forma posible de factorización prima para cualquier número natural dado.

Un número compuesto puede factorizarse en primos mediante un "árbol de factorización" como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5

Determine la factorización prima del número compuesto 504. Como 2 es un factor de 504, podemos empezar las primeras ramas del árbol de factorización escribiendo 504 como 2 . 252. Luego factorización 252 como 2 . 126. Cuando aparezca un factor compuesto que no tenga al 2 como factor, intente con 3, luego con 5, después con 7, y así sucesivamente, hasta que al final de cada rama se encuentre un número primo.

GRÁFICO



Los factores primos están encerrados en un círculo. Al utilizar exponentes, la factorización prima de 504 es $2^3 . 3^2 . 7$ (*Nota:*

INPUT N ≥ 2 *TO GET* *PRIMES ≤ N* *?6*
TO GET *PRIMES ≤ N* *?6* *2* *3* *5* *Done*

La pantalla indica que los primos menores o iguales a 6 son 2, 3 y 5.

Puesto que el teorema fundamental de la aritmética garantiza que esta factorización prima es única, podríamos haber iniciado el árbol de factorización con 3 . 168 o con 8 . 63 u otras posibilidades, y podríamos haber continuado hasta que todos los factores fuesen primos. En todos los casos, hubiéramos obtenido la misma factorización final.)

Como un método alterno al método del árbol de factorización, podríamos dividir 504 entre primos una y otra vez, por medio de la forma compacta que se muestra enseguida.

2	504
2	252
2	126
3	63
3	21
	7

Siguiendo así, y utilizando cuando sean necesarios los primos 2,3,5,7,11, etc., hasta que el último número sea primo. Lea los factores primos que se muestran en negritas, para obtener,

$$504 = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 7.$$

La infinitud de los números primos

Como, en cierto sentido, los números primos son bloques de construcción del sistema de los números enteros, los matemáticos (tanto aficionados como profesionales) los han estudiado durante miles de años. Aunque todavía hay mucho por conocer, existe un importante resultado básico que fue demostrado por Euclides hacia el año 300 a.C., y es que existe una cantidad infinita de números primos. Esto significa que no importa si identificamos un número primo muy grande, siempre habrá otros mayores a él. La demostración de Euclides permanece actualmente como una de las demostraciones más elegantes en las matemáticas. (Una demostración matemática *elegante* es la que presenta el resultado deseado de la forma más directa y concisa posible. Los matemáticos se esfuerzan por lograr la elegancia de sus demostraciones.) Se conoce como **demostración por contradicción.**

Un enunciado puede demostrarse por contradicción de esta forma: suponemos que la negación del enunciado es verdadera. Suponer que la negación es verdadera se utiliza para generar cierto tipo de contradicción, o un absurdo. El hecho de que la negación del enunciado original conduzca a una contradicción significa que el enunciado original debe ser verdadero.

El siguiente argumento puede ayudarnos a lograr un mejor entendimiento de cierta parte de la demostración de que existe un número infinito de números primos.

Supónganse que $M = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 + 1 = 211$. Ahora, M es el producto de los primeros cuatro números primos más 1. Si dividimos 211 entre cada uno de los primos 2, 3, 5 y 7 el residuo siempre es 1.

105	70	42	30
-----	-----	-----	-----
2) 211	3) 211	5) 211	7) 211
210	210	210	210
-----	-----	-----	-----
1	1	1	1

Por lo tanto, 211 no es divisible entre ninguno de los primos 2, 3, 5 y 7.

Ya estamos preparados para demostrar que hay un número infinito de primos. Si se puede demostrar que *no hay número primo más grande,* entonces debe haber un número infinito de primos.

TEOREMA

No existe un número primo más grande.

Demostración: Suponga que existe un número primo más grande y llámelo *P.* Ahora forme el número *M* de manera que

$$M = p_1 . p_2 . p_3 \ldots P \ + \ 1$$

Donde $p_1, \ p_2 \ , p_3 \ , \ldots \ , P$ representan todos los primos menores o iguales a *P*. Ahora, el número *M* debe ser primo o compuesto.

1. Suponga que *M* es primo.

M es obviamente mayor que *P,* así que si *M* es primo, es mayor que el supuesto primo más grande *P*. Hemos llegado a una *contradicción.*

2. Suponga que *M* es compuesto.

Si *M* es compuesto, debe tener un factor primo. Pero ninguno de los $p_1, \ p_2 \ , p_3 \ , \ldots \ , P$ son factores de *M*, ya que la división entre cada uno dejaría un residuo de 1. (Recuerde el argumento de arriba.) Por tanto, si *M* tiene un factor primo, debe ser mayor que *P*. Pero esto es una *contradicción*, ya que *P* es el supuesto número primo más grande.

En cualquiera de los casos, 1 o 2, llegamos a una contradicción. Todo el argumento estaba basado en el supuesto de que existe un número primo más grande, pero como esto nos conduce a contradicciones, no debe haber primo más grande o, de forma equivalente, existe un número infinito de primos.

Marin Mersenne *(1588-1648) en su Cogitata Physico-Mathematica (1644) aseguró que* M_n *era primo para* ***n*** *= 2, 3, 5, 13, 17, 19, 31, 67, 127 y 257 y compuesto para todos los demás números primos* ***n*** *menores que 257. Otros matemáticos de la época sabían que Mersenne no podía haber probado todos los valores, pero ninguno pudo comprobar o refutar lo dicho. Tuvieron que pasar más de 300 años para que todos los primos hasta 257 se pudieran probar en realidad y finalmente se reveló que Mersenne había cometido cinco errores.*

M_{61} *es primo*

M_{67} *es compuesto*

M_{89} *es primo*

M_{107} *es primo*

M_{257} *es compuesto*

Búsqueda de números primos grandes

En la actualidad, tiene una gran importancia práctica la identificación de números primos cada vez más grandes y la factorización de números compuestos muy grandes en sus componentes primos, ya que es la base de los modernos **sistemas de criptografía** (códigos secretos).Durante siglos se han utilizado varios códigos en aplicaciones militares. Hoy en día, la seguridad industrial y la información de negocios también dependen de la teoría de los números primos.

Como los matemáticos continúan la búsqueda de números primos cada vez más grandes, sería bueno tener una fórmula que genere a todos los primos (algo análogo, por ejemplo, a la formula $2n$ que genera a todos los naturales pares para n = 1,2,3,…, o la formula n^2 que genera todos los cuadrados perfectos).Los números generados por la fórmula

$M_n = 2^n - 1$ se denomina **números de Mersenne,** nombrados así en honor del monje Marín Mersenne (1588-1648). Era muy sabido que si n era un número *compuesto* siempre se generaría un número de Mersenne que fuera compuesto. Y al principio, algunos matemáticos creyeron que un *valor* para n siempre generaría un número de Mersenne que fuese primo. Esto es, iniciando con un número primo n, uno siempre producirá otro número primo mayor, $2^n - 1$.

EJEMPLO 6

Evalúe el número de Mersenne M_n para n = 2, 3, y 5.

$M_2 = 2^2 - 1 = 3$ $\qquad$ $M_3 = 2^3 - 1 = 7$

$$M_5 = 2^5 - 1 = 31$$

Observe que los tres valores 3,7 y 31 son primos.

LOS PRIMOS PAGAN

El 14 de noviembre de 2001, la computadora de Michael Cameron, una T-Bird con procesador AMD a 800MHz, encontró el 39º número primo de Mersenne conocido, después de sólo 42 días de cómputo en los ratos en que se encontraba disponible una computadora. El número tiene 4.053.946 dígitos. La fundación Electronics Frontier ha pagado premios de 50.000 dólares por números primos que rompan el récord, a partir del primer primo con más de 1 millón de dígitos. El primer descubridor de un primo de 10 millones de dígitos recibirá 100.000 dólares.

Si quiere unirse a la GIMPS (gran búsqueda por internet de primos de Mersenne) revise htt://www.mersenne.org.

EJERCICIOS

1. Decida si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas.

a) Todo número natural es divisible entre 1.

b) Ningún número natural es a la vez primo y compuesto.

c) No existen números primos pares.

d) Si n es un numero natural y $9|n$, entonces $3|n$.

e) Si n es un numero natural y $5|n$, entonces $10|n$.

f) El 1 es el número primo más pequeño.

g) Todo número natural es tanto factor como múltiplo de sí mismo.

h) Si 16 divide a un número natural, entonces 2, 4 y 8 también deben dividir a ese número natural.

i) El número compuesto 50 tiene 2 factorizaciones primas.

j) El número $2^{11} - 1$ es un ejemplo de un primo de Mersenne.

2. Determine todos los factores de cada número.

a) 12 b) 18 c) 20 d) 28 e) 120 f) 172

3. Utilice pruebas de divisibilidad para decidir si el número dado es divisible entre cada uno de los números siguientes:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 8 g) 9 h) 10 i) 12

1) 315
2) 630
3) 25.025
4) 45.815
5) 123.456.789

4. a) Al construir la Criba de Eratóstenes para 2 a 100, dijimos que cualquier número compuesto en ese rango debe ser múltiplo de algún primo menor o igual a 7(ya que el siguiente primo, 11, es mayor que la raíz cuadrada de 100).Explique.

b) Para ampliar la Criba de Eratóstenes a 200, ¿Cuál es mayor primo cuyos múltiplos tienen que considerarse?

c) Complete el siguiente enunciado: al buscar factores primos de un número dado, sólo necesitamos considerar todos los primos hasta e incluyendo _______________de ese número, ya que un factor primo mayor que______________ sólo puede ocurrir si existe al menos otro factor primo menor que______________.

d) Complete este enunciado. Si ningún primo menor o igual a $\sqrt{n}$ divide a *n*, entonces *n* es un número ____________.

5. Liste dos primos que sean números naturales consecutivos. ¿Puede existir otra pareja?

6. Para que un número natural sea divisible entre 2 y 5, ¿Qué condición debe cumplir su último dígito (el dígito de las unidades)?

7. Considere las pruebas de divisibilidad para 2, 4 y 8 (potencias de 2). Utilice el razonamiento inductivo para predecir la prueba de divisibilidad entre 16. Luego utilice la prueba para demostrar que 456.882.320 es divisible entre 16.

8. Determine la factorización prima de cada número compuesto.

a) 240 b) 360 c) 663

9. *He aquí una prueba de divisibilidad entre 7.*

a) *Duplique el último dígito del número dado y reste este valor del número sin su último digito.*

b) *Repita el proceso del inciso a) tantas veces como sea necesario hasta que el número obtenido pueda dividirse fácilmente entre 7.*

c) *Si el número obtenido es divisible entre 7, entonces lo es también el número dado. Si el número obtenido no es divisible entre 7, tampoco lo es el número dado*

Utilice esta prueba de divisibilidad para determinar si cada número siguiente es o no divisible entre 7.

1) 142.891 2) 458.458 3) 409.311

10. Considere la prueba de divisibilidad para el número compuesto 6, y haga una conjetura para la prueba de divisibilidad para el número compuesto 15.

11. *Hay un método para determinar el* **número de divisores** *de un número compuesto. Para hacerlo, escriba el número compuesto en su forma de factores primos, utilizando exponentes. Sume 1 a cada exponente y multiplique estos números. Su producto indica el número de divisores del número compuesto. Por ejemplo, $24 = 2^3 . 3 = 2^3 . 3^1$. Ahora sume 1 a cada exponente: 3+1=4, 1+1 =2. Multiplique 4 x 2 para obtener 8. Hay 8 divisores de 24. (Como 24 es muy pequeño, esto puede verificarse con facilidad. Los divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24, un total de 8, como se predijo.)*

Determine el número de divisores de cada uno de los siguientes números compuestos.

a) 36 b) 72 c) $2^8.\ 3^2$

12. *Año bisiesto es aquel divisible entre 4, excepto cuando el año es divisible entre 100 (cuando termina con dos ceros).En tal caso, el número debe ser divisible entre 400 para que el año sea bisiesto. Determine cuál de los años siguientes es bisiesto.*

a) 1776 b) 1994 c) 2400

13. ¿Por qué la siguiente *no* es una prueba válida de divisibilidad entre 8? "Un número es divisible entre 8 si es divisible entre 4 y entre 2". Sustente su respuesta con un ejemplo.

14. Explique por qué el producto de tres números naturales consecutivos debe ser divisible entre 6.

15. Sean $A = \{\ n / n$ es múltiplo de $2\}$
$B = \{$múltiplos de $3\}$
$C = \{$múltiplos de $4\}$
$D = \{$múltiplos de $6\}$
$E = \{$múltiplos de $12\}$
Representar las relaciones entre estos subconjuntos mediante un diagrama de Venn.

16. En la demostración de Euclides de que no existe un primo mayor que todos, se construyó un número M tomando el producto de primos y sumando 1. Observe el patrón siguiente.

$$M = 2 + 1 = 3 \qquad (3\ es\ primo)$$
$$M = 2.3 + 1 = 7 \qquad (7\ es\ primo)$$
$$M = 2.3.5 + 1 = 31 \qquad (31\ es\ primo)$$
$$M = 2.3.5.7 + 1 = 211 \qquad (211\ es\ primo)$$
$$M = 2.3.5.7.11 + 1 = 2311 \qquad (2311\ es\ primo)$$

Parece que este patrón siempre dará un número primo. Ahora evalúe

$$M = 2.3.5.7.11.13 + 1$$

¿Es primo o compuesto? Si es compuesto proporcione su factorización en primos.

17. *El texto afirma que el número de Mersenne M_n es compuesto siempre que n sea compuesto. Los incisos siguientes perfeccionan una manera en la que usted siempre puede determinar un factor de tal número de Mersenne.*

a) Determine $M_n = 2^n - 1$ para el número compuesto $n = 6$.

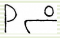
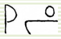
b) Observe que $p = 3$ es un factor primo de $n = 6$ .Determine $2^p - 1$ para $p=3$. ¿ $2^p - 1$ es un factor de $2^n - 1$?

c) Complete este enunciado: si p es un factor primo de n entonces _______________ es un factor del número de Mersenne $2^n - 1$.

d) Determine $M_n = 2^n - 1$ para *n=10*.

e) Utilice el procedimiento que se ilustro antes, para encontrar dos factores distintos de M_{10}

f) ¿Cree que este procedimiento siempre produce factores *primos* de M_n para n compuesto? (*Una pista:* Considere *n=22* y su factor primo *n=11*.)

EL PORCENTAJE: %, Evolucionó probablemente de un manuscrito italiano de 1425. En lugar de "per 100","P100"o "P cento", que era lo común en esa época, el autor utilizo *. Alrededor de 1650, el símbolo*  *se transformo en $\frac{0}{0}$, de modo que" per $\frac{0}{0}$ se uso con frecuencia". Finalmente la palabra "per" fue eliminada, dejando $\frac{0}{0}$ o %.*

Tomado de Historical Topics for the Mathematics Classroon, el trigésimo primer libro del año del Consejo Nacional de Maestros de Matemática (NCTM) , 1969.

<u>PORCENTAJE</u>: Una de las principales aplicaciones de los decimales consiste en problemas que implican el uso de **porcentajes.** En las matemáticas del consumidor, las tasas de interés y los descuentos frecuentemente se dan en porcentajes. La palabra porcentaje se deriva de "por ciento". El símbolo % representa "por ciento".

PORCENTAJE

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

<u>Ejemplo 1</u>: Convierta cada porcentaje en decimal.

a) 98 % = 98 (1%)=98 . (0,01)= 0,98
b) 3,4 % = 0,034
c) 0,2 % = 0,002

<u>Ejemplo 2:</u> Convierta cada decimal en porcentaje.

a) 0,13= 13 . (0,01) = 13 . (1%) = 13 %
b) 0,532= 53,2 . (0,01)=53,2 . (1%)=53,2%
c) 2,3= 230%

De los ejemplos 1) y 2), concluimos que cuando se hacen conversiones entre porcentajes y decimales pueden usarse los procedimientos siguientes:

Como realizar conversiones entre decimales y porcentajes

1) *Para convertir un porcentaje en decimal*, quite el signo % y mueva el punto decimal dos lugares a la izquierda, insertando ceros que ocupen los lugares que falten si es necesario.

2) *Para convertir un decimal en porcentaje*, mueva el punto decimal dos lugares a la derecha, y añada ceros para ocupar los lugares que falten, si es necesario; a continuación, añada el signo %.

***<u>Ejemplo 3</u>*:** Convierta cada fracción en porcentaje.

a) $\frac{3}{5}$

Primero escriba $\frac{3}{5}$ como un decimal. Al dividir 3 entre 5 se obtiene $\frac{3}{5}$ = 0,6= 60%

b) $\frac{14}{25}$ = 0,56 = 56 %.

A continuación se resume el procedimiento del ejemplo 3.

Como convertir una fracción en porcentaje
Para pasar una fracción a porcentaje, convierta la fracción en un decimal y luego el decimal en porcentaje.

En los ejemplos siguientes se incluyen porcentajes, se muestran tres métodos. El segundo de ellos implica, en cada caso, el método de productos cruzados. El tercero incluye la tecla de porcentaje de una calculadora.

Ejemplo 4: Determine 18 % de 250.

Método 1: La palabra clave aquí es "de". La palabra "de" se traduce como "veces" "multiplicado por" o simplemente "por", con 18% de 250 dado por

(18%) . (250) = (0,18) . (250) = 45

Método 2: piense "¿18 es para 100 como (x) es para 250?". Esto se traduce en la ecuación

$$\frac{18}{100} = \frac{x}{250} \Rightarrow 100 \, . \, x = 18 \, . \, (250)$$

$$x = \frac{18 \, . \, 250}{100} = 45$$

Método 3: Utilice la tecla de porcentaje de una calculadora con la siguiente secuencia de tecleo:

2	5	0	x	1	8	%	45

Ejemplo 5: ¿Qué porcentaje de 500 es 75?

Método 1: La frase "que porcentaje" puede representarse por x . 1% o 0,01x. Nuevamente la palabra "de" se traduce "por", mientras que "es" se traduce como "igual a". Por lo tanto

0,01x . (500) = 75

5 x =75 $\rightarrow$ x = 15

Método 2: Piense "¿es (x) a 100 lo que 75 es a 500 ?" . Esto se traduce como:

$$\frac{x}{100} = \frac{75}{500} \Rightarrow 500\,.\,x = 7500$$

$$x = 15$$

Método 3:

7	5	÷	5	0	0	%	15

En cada caso, 15 es el porcentaje, de modo que podemos concluir que 75 es el 15 % de 500.

Ejemplo 6: 38 es el 5%, ¿de qué numero?

Método 1: $38 = 0{,}05\ x$

$$x = \frac{38}{0{,}05} \Rightarrow x = 760$$

Método 2: Piense "38 es a que numero (x) lo que 5 es a 100?

$$\frac{38}{x} = \frac{5}{100} \Rightarrow 5\,.\,x = 3.800$$

$$x = 760$$

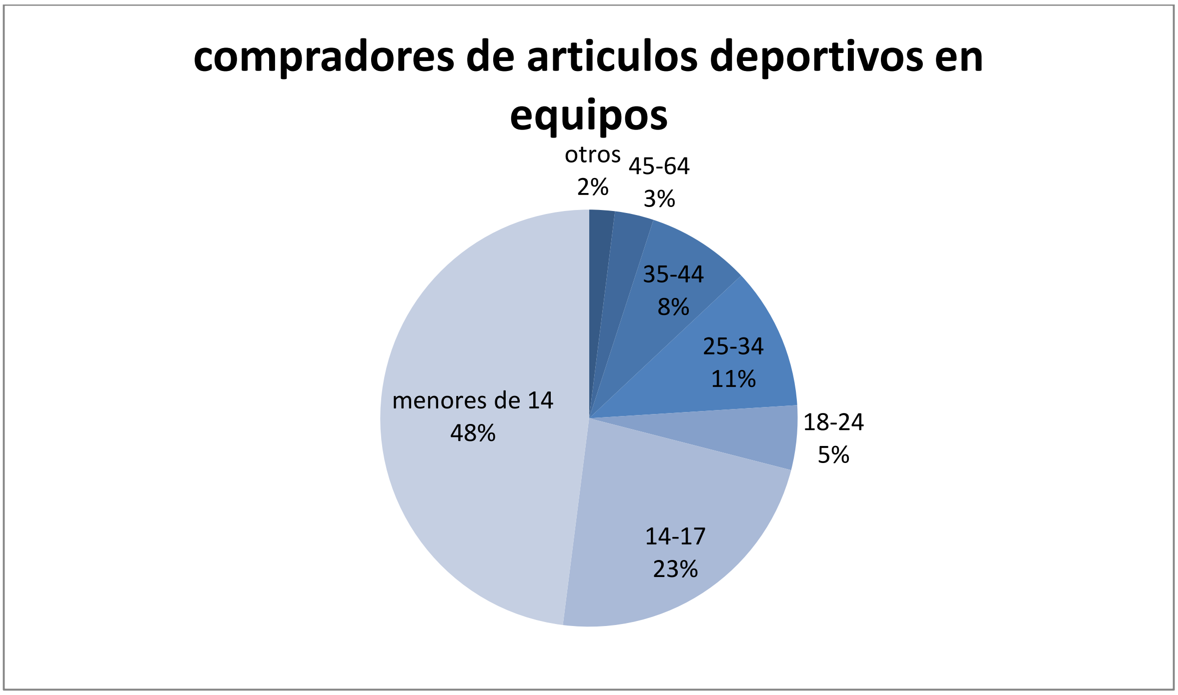
Método 3:

3	8	÷	5	%	760

Cada método nos muestra que 38 es el 5% de 760.

Solución de problemas: Cuando aplicamos porcentajes, es una buena idea reformular el problema dado como una pregunta similar a la que se encuentra en los ejemplos precedentes, y luego proceder a responder esa pregunta. Una estrategia para resolver problemas consiste en solucionar un problema similar pero más sencillo.

Ejemplo 7: El diagrama circular de la figura muestra la división de porcentajes aproximados, en un año reciente, por grupos de edades que compran artículos para practicar deportes en equipo. De acuerdo con la Asociación Nacional de Bienes Deportivos, se gastaron alrededor de \$15.691 millones ese año en artículos deportivos.



¿Cuánto gastaron los compradores menores de 14 años?

La parte del círculo que representa al grupo de menores de 14 años es 48% del círculo. Por tanto, debemos determinar 48% de $15.691 millones:

0.48 x $15.691 millones = $7.351,68 millones

(48% de monto total monto gastado por el grupo de menores de 14 años)

En muchos problemas prácticos se nos pide determinar el porcentaje de aumento o disminución de una cantidad a otra. Las siguientes guías resumen como hacerlo.

Como determinar el porcentaje de aumento o disminución:

1. Para determinar el porcentaje de **aumento** de a a b, donde b > a, reste a de b , y divida este resultado entre a. Convierta en porcentaje.

Ejemplo: el porcentaje de aumento de 4 a 7 es : $\frac{7-4}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$.

2. Para determinar el porcentaje de **disminución** de a a b, donde b < a, reste b de a , y divida este resultado entre a. Convierta en porcentaje.

Ejemplo: el porcentaje de disminución de 8 a 6 es $\frac{8-6}{8} = \frac{2}{8} = 25\%$.

Ejemplo 8: La Vegas, Nevada, tiene la tasa más alta de crecimiento de todas las ciudades de Estados Unidos. En 1990, la población de su área metropolitana era de 852.646 habitantes. En 1998 había aumentado a 1.321.546.

a) Estime el porcentaje de aumento en ese período.

Si redondeamos las cantidades a 850.000 y 1.300.000, respectivamente, podremos determinar con facilidad que el aumento en la población es aproximadamente

1.300.000 - 850.000= 450.000. Entonces, debemos contestar la pregunta "¿Qué porcentaje de 850.000 (la población original) es de 450.000?". Como 450.000/ 850.000 es poco menos que 9/17, el porcentaje de aumento es poco mayor que 50%. Por lo tanto, el aumento de población fue de un poco mas de 50%.

b) Determine el porcentaje de aumento real, al decimo de por ciento más cercano.

Debemos calcular la diferencia entre las dos poblaciones y luego determinar qué porcentaje de 852.646 es esta diferencia.

1.321.546	–	852.646	=	468.900
población en 1998		población en 1990		aumento en población

Ahora resolvamos el problema "¿qué porcentaje de 852.646 es 468.900?". Este es similar al problema del ejemplo 5. Cualquiera de los métodos explicados allí demostrara que la respuesta es aproximadamente 55.0%.

ACTIVIDADES:

1) Decida si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.

a) 300% de 12 es 36.
b) 25 % de una cantidad es lo mismo que ¼ de la cantidad.
c) Para determinar el 50 % de una cantidad podemos simplemente dividir la cantidad entre 2.
d) Un equipo de futbol que gana 12 juegos y pierde 8 tiene un porcentaje de triunfos de 60%.
e) Si 70 % es la calificación mínima para aprobar una prueba que tiene 50 preguntas, entonces, al responder más de 35 preguntas correctamente usted asegurara la calificación mínima de aprobación.
f) 30 es más grande que el 40 % de 120.
g) Si un artículo cuesta $70.000 y se descuenta el 10%, el precio de venta es $7,00.

2) **Cambio en la población.** La tabla muestra el cambio de porcentaje anual en la población de 1990 a 1999 para alguna de las ciudades más grandes de Estados Unidos.

Ciudad	Cambio porcentual
Nueva York	1,4
Los Ángeles	4,2
Chicago	0,6
Filadelfia	-10,6
Houston	8,7
Detroit	-6,1

a) ¿Cuál ciudad tuvo mayor cambio porcentual? ¿Cuál fue ese cambio? ¿Fue de aumento o de disminución?

b) ¿Cual ciudad tuvo menor cambio porcentual? ¿Cuál fue ese cambio? ¿Fue de aumento o de disminución?

3) Convierta cada decimal a un porcentaje.

a) 0,42 b) 0,0837 c) 12,68925 d) 3.689,537 e)43,99613

4) Convierta cada fracción en un porcentaje.

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{100}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{5}{6}$

5) Explique la diferencia entre el ½ de una cantidad y el ½ % de la misma.

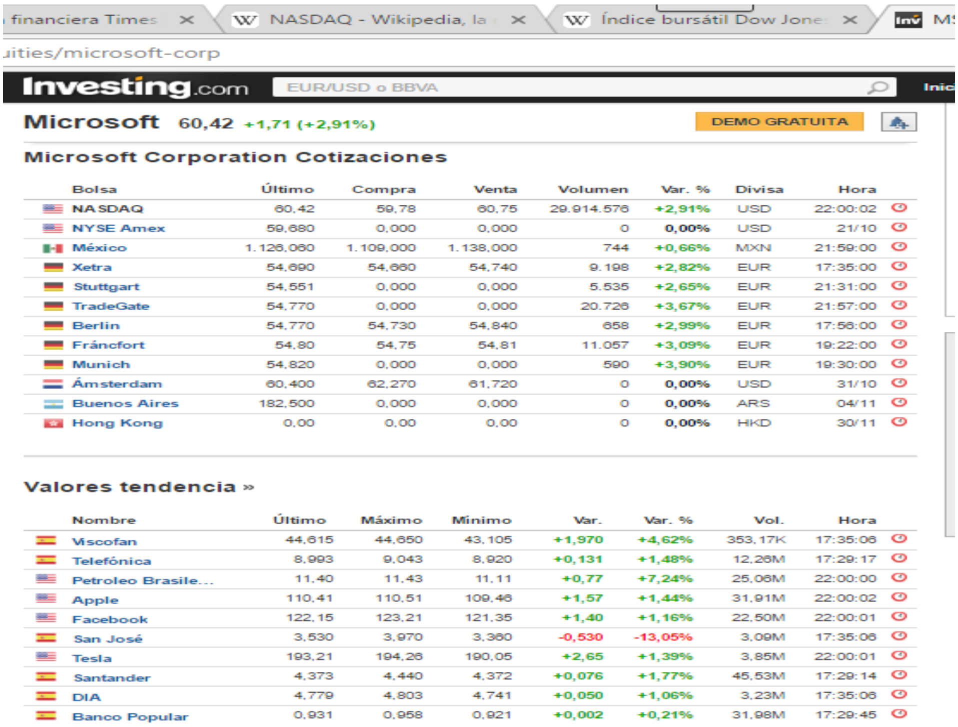
6) Suponga que el precio normal de un artículo es de $60,00 y se le descuenta el 20%. Si luego se le aumenta el 20% ¿es $60,00 el precio resultante? Si no es así ¿Cuál es?

7) Un artículo vale 80 pesos después de aplicarle un IVA del 16% ¿Cuánto valdría sin IVA?

8) A un hombre le ponen una multa de 500 pesos por exceso de velocidad, pero como tarda en pagarla se le aplica una sobretasa del 15% ¿Cuánto debe abonar ahora?

9) En las últimas elecciones celebradas en una ciudad han acudido a votar 16.500 personas. Si el índice de participación ha sido del 66%, ¿cuál era el número de votantes inscriptos?

10) La información siguiente apareció en la sección financiera del Times Picayune de Nueva Orleans el jueves 20 de enero de 2000(De Associated Press) .


financiera Times × NASDAQ - Wikipedia, la × Índice bursátil Dow Jone ×

ities/microsoft-corp

Investing.com EUR/USD o BBVA

Microsoft 60,42 +1,71 (+2,91%) DEMO GRATUITA

Microsoft Corporation Cotizaciones

Bolsa	Último	Compra	Venta	Volumen	Var. %	Divisa	Hora
NASDAQ	60,42	59,78	60,75	29.914.576	+2,91%	USD	22:00:02
NYSE Amex	59,680	0,000	0,000	0	0,00%	USD	21/10
México	1.126,060	1.109,000	1.138,000	744	+0,66%	MXN	21:59:00
Xetra	54,690	54,660	54,740	9.198	+2,82%	EUR	17:35:00
Stuttgart	54,551	0,000	0,000	5.535	+2,65%	EUR	21:31:00
TradeGate	54,770	0,000	0,000	20.726	+3,67%	EUR	21:57:00
Berlin	54,770	54,730	54,840	658	+2,99%	EUR	17:56:00
Fráncfort	54,80	54,75	54,81	11.057	+3,09%	EUR	19:22:00
Munich	54,820	0,000	0,000	590	+3,90%	EUR	19:30:00
Ámsterdam	60,400	62,270	61,720	0	0,00%	USD	31/10
Buenos Aires	182,500	0,000	0,000	0	0,00%	ARS	04/11
Hong Kong	0,00	0,00	0,00	0	0,00%	HKD	30/11

Valores tendencia »

Nombre	Último	Máximo	Mínimo	Var.	Var. %	Vol.	Hora
Viscofan	44,615	44,650	43,105	+1,970	+4,62%	353,17K	17:35:06
Telefónica	8,993	9,043	8,920	+0,131	+1,48%	12,26M	17:29:17
Petroleo Brasile...	11,40	11,43	11,11	+0,77	+7,24%	25,06M	22:00:00
Apple	110,41	110,51	109,46	+1,57	+1,44%	31,91M	22:00:02
Facebook	122,15	123,21	121,35	+1,40	+1,16%	22,50M	22:00:01
San José	3,530	3,970	3,360	-0,530	-13,05%	3,09M	17:35:06
Tesla	193,21	194,26	190,05	+2,65	+1,39%	3,85M	22:00:01
Santander	4,373	4,440	4,372	+0,076	+1,77%	45,53M	17:29:14
DIA	4,779	4,803	4,741	+0,050	+1,06%	3,23M	17:35:06
Banco Popular	0,931	0,958	0,921	+0,002	+0,21%	31,98M	17:29:45

Nueva York. El índice compuesto Nasdaq alcanzo un nuevo record el miércoles, a la vez que los inversionistas penalizaron a Microsoft por un informe de ganancias que, aunque alcanzo los estimados que ya habían sido publicados, no impresiono a ciertos analistas de Wall Street.

El Nasdaq subió a 4.151,29 su primer nuevo record desde el cierre en 4.131,15 el 3 de enero. El Dow Jones industrial cayó de 71,36 a 11,49 una disminución que provino casi en su totalidad de Microsoft.

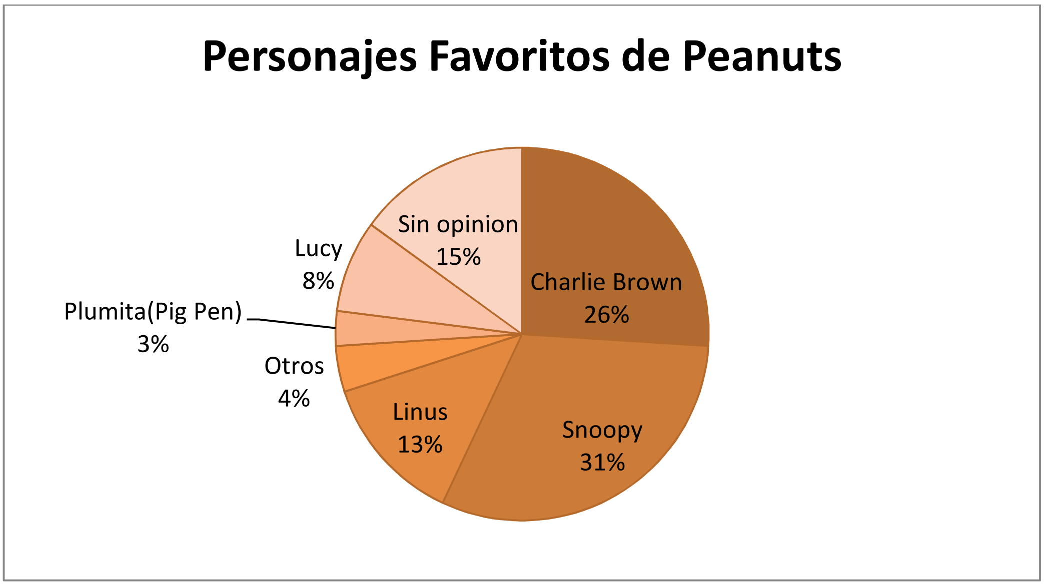
a) ¿En qué porcentaje subió Nasdaq?

b) ¿En qué porcentaje bajo el Dow Jones industrial?

11) Personajes favoritos de Peanuts. El 13 de febrero de 2000, los fanáticos de Peanuts dijeron adiós a la versión original de esta popular historieta. La grafica circular muestra los resultados de una encuesta a adultos para determinar sus personajes favoritos.

a) Si una muestra aleatoria de 2500 adultos respondieron la encuesta ¿cuántos mencionaron a Lucy como su personaje favorito?

b) Si cierta muestra resulto en que 45 personas mencionaron a Linus como su favorito ¿aproximadamente cuantos esperaríamos que mencionaran a Charlie Brown (Carlitos) como su favorito? ¿Por qué?



12) Recientemente un grupo de adultos fueron encuestados acerca de los productos de los que no podemos prescindir a partir de una lista de "artículos diarios" que con frecuencia tomamos por sentado. Complete los resultados que se muestran en la tabla, si se encuesto a 500 adultos.

Articulo	Porcentaje que no podría prescindir de él.	Número de personas que no podría prescindir de él.
Papel de baño	69%	…………………
Cremalleras	42%	………………….
Alimentos congelados	…………………………	190
Notas autoadheribles	………………………..	75

13) Procedimiento en las propinas. *Es costumbre en nuestra sociedad dar "propina" a los camareros y camareras en restaurantes. El porcentaje común de la propina es de 15%. Una forma rápida de calcular una propina que dará una aproximación cercana al 15 % es como sigue:*

i. *Redondee la cuenta al peso más cercano.*
ii. *Determine el 10 % de esa cantidad moviendo el punto decimal un lugar a la izquierda.*
iii. *Obtenga la mitad de la cantidad resultante en el paso ii. y súmela al resultado del paso ii.*

Esto dará aproximadamente 15 % de la cuenta. La cantidad obtenida en el paso iii es de 5% y 10% + 5% =15%.

Utilice el método descrito para encontrar una aproximación del 15% de cada una de las siguientes cuentas de restaurant.

a) $329,57 b) $ 515,20 c) $383,20 d) $199,86

Suponga que recibió un servicio extraordinariamente bueno y decide dar una propina de 20%. Puede utilizar los primeros dos pasos listados, y luego en el paso iii, duplique la cantidad que obtuvo en el paso ii.

Utilice este método para determinar una aproximación de 20% para cada una de las siguientes cuentas de restaurant.

a) $59,96 b)$ 180,43 c) $199,86 d) $40,24

COMBINATORIA

¿Qué es?

La Combinatoria estudia los diferentes modos en que se pueden llevar a cabo una cierta tarea de ordenación o agrupación de unos cuantos objetos siguiendo unas reglas prefijadas. Por ejemplo:

¿Cómo se pueden colocar las 32 fichas de ajedrez en el tablero de modo que no haya dos en el mismo cuadro?

¿Cuántas banderas diferentes se pueden hacer con tres franjas horizontales si tenemos tela de 6 colores diferentes?

Aquí tienes las preguntas más importantes que debemos contestar:

¿Es posible realizar la tarea propuesta?

A veces sí y a veces no. Si se trata, por ejemplo, de colocar las 32 fichas de ajedrez en los 64 cuadros del tablero sin que haya dos en un mismo cuadro, es claro que pueda realizar y de muchos modos.

Sin embargo, en un dominó, si se quitan las 7 fichas que contienen al 6 (seis-blanca, seis-uno, seis-dos,…,seis-seis),¿será posible colocar las 21 fichas restantes sobre la mesa, siguiendo las reglas del juego? Curiosamente esto es imposible. Sin embargo cuando están todas las fichas, la experiencia es posible. ¿Te atreves a investigar por qué sucede así?

¿Cómo proceder para realizar la tarea de todos los modos posibles?

Si la tarea propuesta es realizable, suele haber muchas formas de hacerlo y es necesario buscar un sistema para no olvidar ninguna a la hora de escribirlas. Por ejemplo:

En una bolsa hay cinco bolillas numeradas del 1 a 5.

¿Cómo harías para escribir todas las formas posibles de sacar, a la vez, tres de ellas?

En el caso del ajedrez, por ejemplo, seguro que no resultará nada sencillo anotar todas las posibles colocaciones de las 32 fichas en el tablero.

¿De cuántas formas posibles se puede realizar la tarea?

Si has logrado hacerte un sistema para obtener todas las formas de realizar la tarea, generalmente no te resultará difícil contar cuántas son en total. Compruébalo en el caso de las bolas de la bolsa.

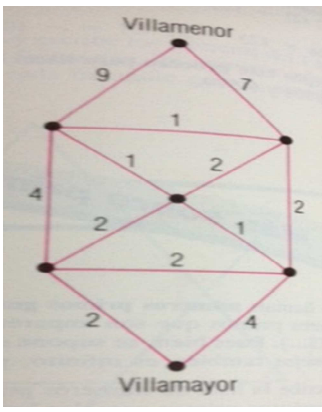
¿Cuál es la mejor forma de realizar la tarea propuesta?

Suponiendo que se ha señalado un criterio para decidir que un método de realizar la tarea es mejor que otro, surge una pregunta importante:*¿Cuál será el mejor de todos*?

Por ejemplo:

De Villamenor a Villamayor hay distintas formas de ir, según se indica en el siguiente mapa esquemático.

¿Podrías señalar cuál o cuáles son los caminos más cortos?



La computadora: un gran auxiliar en combinatoria

Como puedes observar por el tipo de preguntas que la combinatoria se plantea, la computadora, bien conducida, puede proporcionar una ayuda extraordinaria para resolverlas. Este es precisamente el tipo de problemas que mejor se le da.

Necesitamos disponer de procedimientos económicos y generalizables, para resolver los problemas de Combinatoria, te proponemos que realices las siguientes actividades:

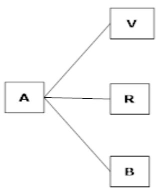
EJERCICIO 1 Se tienen cuatro franjas de tela: una azul, una roja, una verde y una blanca;

a) ¿de cuántas maneras puedes elegir dos franjas para formar una bandera?

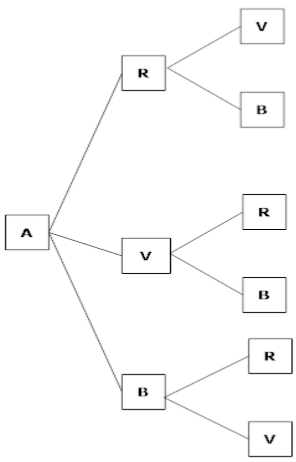
b) ¿de cuántas maneras se pueden elegir tres de esas franjas para formar una bandera?

EJERCICIO 2 En el ejercicio anterior el número de elementos es pequeño, así que generalmente no hay dificultades para contestar. Ahora se presentará una forma grafica de resolver el problema que facilita las acciones en caso de que el número de elementos sea mayor. Se llama **diagrama de árbol** y consiste en:

- Considerar las cuatro franjas llamándolas con la inicial de su color: A, R, V, B,
- Tomar una de ellas, por ejemplo A, y como para elegir la segunda quedan tres posibilidades (R , V, B) se puede representar así:



- Para cada elección de la segunda franja quedan dos franjas, que son diferentes y se representa:



a) Completar el diagrama para R , V , y B como primera elección .
b) ¿Cómo se encuentra en el diagrama la respuesta al ejercicio 1?

EJERCICIO 3

Considerar los nueve dígitos de 1 a 9.

a) ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden formar?

b) Si para resolver a) se construye un diagrama de árbol, en él se pueden leer las respuestas a las preguntas:

- ¿Cuántos números con 3 cifras diferentes se pueden formar?
- ¿Cuántos, de 5 cifras diferentes y terminados en 3?
- ¿Cuántos, de 5 cifras diferentes y que sean pares?

c) Repetir a) y b) considerando solo los dígitos impares.

EJERCICIO 4

Si se tienen 10 elementos diferentes, para tomar pares ordenados, ternas ordenadas, etc., de elementos también diferentes, se pueden construir el diagrama de árbol que corresponde para saber cuántos pares cuantas ternas, etc., se pueden construir. Ahora se trata de descubrir con que operación aritmética se pueden hallar esos resultados. Si hace falta, hacer los diagramas. Después, completar el cuadro.

10 elementos	Números de casos	Operación aritmética
Tomados de a 2	90	10 . 9
Tomados de a 3		
Tomados de a 4		
Tomados de a 5		

EJERCICIO 5

Lee la siguiente **definición**:

*Se llaman **variaciones** de **n** elementos tomados de a **p** a los subconjuntos de **p** elementos que se pueden formar con los **n** dados, considerando que dos variaciones son distintas cuando difieren en algún elemento o cuando difieren en el orden en que se presentan.*

*El **número de variaciones** de n elementos tomados de a p, se simboliza:* $V_{n,p}$

a) La situación analizada en los ejercicios 1 y 2 constituye un ejemplo de variaciones. Escribir en símbolos la respuesta hallada.

b) En el ejercicio 3 hay una pregunta que pide calcular $V_{9,3}$.¿Cuál es?

EJERCICIO 6

a) Con las cuatro franjas de tela (A, R, V, B) se quiere formar banderas con cuatro colores.

¿cuántas se pueden formar? Hacer el diagrama de árbol si es necesario.

b) El caso a) es un ejemplo más de cálculo de variaciones. Escribir la respuesta en símbolos.

EJERCICIO 7

a) Con las cinco cifras impares se pueden formar números de cinco cifras distintas. ¿cuántos son?

b) Completar: $V_{5,5}$ =…

EJERCICIO 8

Analizar las situaciones de los ejercicios 6 y 7 para descubrir qué operaciones dan sus respuestas. Conviene revisar los resultados del cuadro del ejercicio 4 y comparar los diagramas de árbol que representa cada situación .Completar con las operaciones.

$V_{4,4}$ =… $V_{5,5}$ =…

EJERCICIO 9

a) ¿En qué se parecen los ejemplos de variaciones de los ejercicios 6 y 7, característica que no tienen los demás ejemplos estudiados?

b) Leer la siguiente **definición:**

Se llaman ***permutaciones*** *de* **n** *elementos a las variaciones de* **n** *elementos tomados de a* **n**.

El número de permutaciones se indica con el símbolo P_n .

¿En qué se parecen y en qué se diferencian dos permutaciones de seis cifras? (Por ejemplo: 1,2,3,4,5,6) ¿Cuántas permutaciones son?

EJERCICIO 10

Leer la siguiente **definición:**

*Se llama **factorial** de un numero natural* **n** *al producto de todos los números naturales menores o iguales que* **n**.

En símbolos: $n\,!$

Ejemplos: $7\,! = 7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1$

$3\,! = 3\,.\,2\,.\,1$

¿En qué tipo de variaciones el cálculo de todos los casos equivale al cálculo de un factorial?

EJERCICIO 11

Los cocientes entre factoriales pueden ser usados para situaciones particulares de la Combinatoria.

a) Calcular los cocientes que siguen:

$\frac{10!}{5!} =$ $\frac{10!}{9!} =$ $\frac{7!}{6!} =$

$\frac{11!}{2!} =$ $\frac{5!}{2!} =$ $\frac{12!}{7!} =$

b) Si hace falta, escribir ejemplos numéricos. Expresar en general el resultado de $\frac{n!}{(n-1)!}$

c) Expresar en general: $\frac{n!}{(n-5)!}$

d) Expresar en general: $\frac{n!}{(n-p)!}$

e) Expresar como cocientes de factoriales:

$$8.7.6.5.4 =$$

$$8.7.6 =$$

EJERCICIO 12

Situaciones para explorar:

1. Número de distintivos que se pueden formar con dos colores distintos de cuatro disponibles.

2. Número de banderines que se pueden formas con dos colores distintos de cuatro disponibles.

3. Número de distintivos que se pueden formar con tres colores distintos de cinco disponibles.

4. Número de banderines que se pueden formas con tres colores distintos de cinco disponibles.

5. Número de distintivos que se pueden formas con dos colores distintos de tres disponibles.

6. Número de banderines que se pueden formas con dos colores distintos de tres disponibles.

Formule las respuestas, muestre los procedimientos con que fueron halladas y los argumentos que las justifican.

EJERCICIO 13

a) ¿Cuáles de las situaciones del ejercicio anterior corresponden a un cálculo de las variaciones entre **n** elementos? Indicar que valor es n en cada caso.

b) ¿En qué situaciones del ejercicio 12 la formación de duplas, ternas, etc. Es independiente del orden?

c) Completar los cuadros que siguen para mostrar el número de duplas, ternas, etc que se pueden formar cuando no se tiene en cuenta el orden.

$$n = 3$$

De a 2	
De a 3	

$$n = 4$$

De a 2	
De a 3	
De a 4	

$$n = 5$$

De a 2	
De a 3	
De a 4	
De a 5	

EJERCICIO 14

a) Lee atentamente la siguiente **definición:**

*Se llaman **combinaciones** de* **n** *elementos tomados de a* **p** *a todos los subconjuntos de p elementos que se puedan formar con los n dados, considerando que dos combinaciones son distintas cuando difieren al menos en un elemento.*

*El **número de combinaciones** de elementos tomados de a* p, *se simboliza:* $C_{n,p}$

b) En el ejercicio 13 completaste cuadros de combinaciones.

¿Cuál es el valor de $C_{5,3}$? …¿ y el de $C_{4,2}$?

Anota en símbolos cada caso de los cuadros en que el cálculo de combinaciones haya dado 4.