

Apéndice I

Capa límite fluido dinámica sobre una placa plana: Solución exacta de Blasius

Para determinar el coeficiente de transferencia de calor por convección sobre una placa plana mediante la solución de las ecuaciones de la capa límite, podemos aplicar el "principio de similitud". Este principio que se deriva a partir de condiciones de similitud geométrica, es decir dos cuerpos son similares cuando la relación entre sus dimensiones permanece constante, se extiende a otras propiedades. Entonces, decimos que dos sistemas son físicamente similares cuando las relaciones entre sus dimensiones, fuerzas actuantes, velocidades, temperaturas etc. son proporcionales entre sí. Esto equivale a emplear un nuevo modelo en función de variables adimensionales obtenidas a partir de variables dimensionales y cuyos valores son válidos, tanto para el sistema original como para el nuevo modelo. Estas variables se conocen como variables de similitud y el problema consiste en encontrar las variables de similitud apropiadas para cada caso.

La ecuación de continuidad,

$$\frac{\delta u_x}{\delta x} + \frac{\delta u_y}{\delta y} = 0$$

y la ecuación de cantidad de movimiento

$$u_x \frac{\delta u_x}{\delta x} + u_y \frac{\delta u_x}{\delta y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\delta^2 u_x}{\delta y^2}$$

están sujetas a las siguientes condiciones de frontera o de borde:

en $y = 0$	$u_x = u_y = 0$
en $x = 0$	$u_x = u_\infty$
en $y = \infty$	$u_x = u_\infty$

Si resolvemos estas ecuaciones podemos determinar el perfil de velocidades y el espesor de la capa límite, lo cual no es nada simple por cierto. Para simplificar este sistema, podemos definir una función de corriente $\Psi(x,y)$ de forma tal que se cumplan las siguientes relaciones:

$$u_x = \frac{\delta \Psi}{\delta y} \quad ; \quad u_y = - \frac{\delta \Psi}{\delta x}$$

Así nos independizamos de la ecuación de continuidad y nos queda:

$$\frac{\delta \Psi}{\delta y} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta x \delta y} - \frac{\delta \Psi}{\delta x} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta y^2} = \nu \frac{\delta^3 \Psi}{\delta y^3}$$

con condiciones de borde:

$$\begin{aligned}\delta\Psi/\delta x &= \delta\Psi/\delta y = 0 && \text{en } y = 0 \\ \delta\Psi/\delta y &= u_{\infty} && \text{en } y = 0\end{aligned}$$

Para convertir esta ecuación en derivadas parciales en una ecuación diferencial ordinaria empleamos la variable de similaridad $\eta(x,y)$:

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu x}} = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{x u_{\infty}}{\nu}} = \frac{y}{x} Re_x^{1/2}$$

de forma tal que la función de corriente nos queda expresada como el producto entre, un factor de escala $(\nu x u_{\infty})^{1/2}$ y una función conocida como factor de forma $f(\eta)$:

$$\Psi = \sqrt{\nu x u_{\infty}} f(\eta)$$

Reemplazando en la ecuación (2.23) nos queda la expresión conocida como ecuación de Blasius:

$$2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0$$

con condiciones de borde:

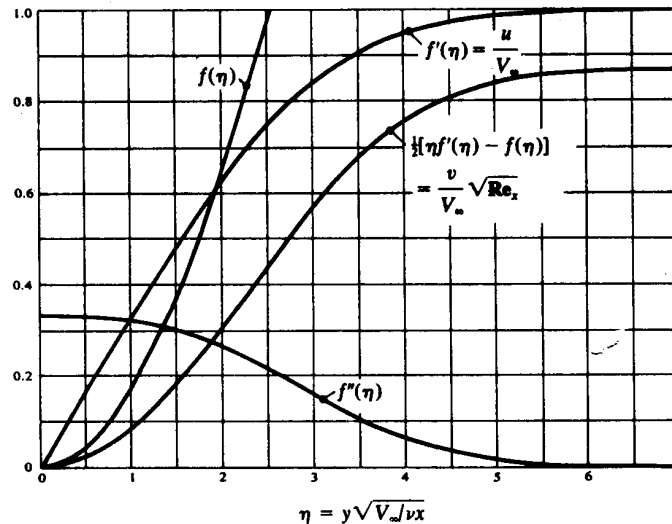
$$\begin{aligned}df/d\eta &= f = 0 && \text{en } \eta = 0 \\ df/d\eta &= 1 && \text{en } \eta = \infty\end{aligned}$$

La ecuación de Blasius también suele encontrarse escrita como:

$$f + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

La solución analítica de la ecuación (2.27) es bastante compleja por lo que Blasius resolvió la misma por expansión en series alrededor de $\eta=0$ y mediante una expansión asintótica para grandes valores de η , que luego son igualadas para un valor apropiado de η (Schlichting, 1977).

La Figura 2.7 muestra la solución gráfica de la ecuación de Blasius (Pitts y Sissom, 1977).



La ecuación de Blasius también se puede resolver mediante técnicas numéricas, por ejemplo empleando la técnica conocida como “shooting” o bien mediante una transformación (ec. 2.27) en una ecuación diferencial de segundo orden para luego aplicar diferencias finitas y el algoritmo de Thomas. A continuación se incluye el listado de un programa desarrollado en lenguaje FORTRAN que resuelve la ecuación de Blasius empleando las técnicas de diferencias finitas y el algoritmo de Thomas.

```

PROGRAM BLASOL
C
C *****
C SOLUTION OF BLASIUS' EQUATION.
C THOMAS ALGORITHM IS NOT APPLICABLE FOR THIRD ORDER
C EQUATIONS, THEREFORE, THE SYSTEM HAS BEEN TRANSFORMED
C IN ORDER TO BE SOLVED BY FINITE DIFFERENCES.
C
C ALBERTO BLASETTI
C THE UNIVERSITY OF WESTERN ONTARIO
C LONDON, ONTARIO - CANADA
C 1991
C *****
C
C IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C CHARACTER*12 FILE_NAME
C DIMENSION ZP(10000),Z(10000)
C COMMON/INPUT/ FIN
C COMMON/VARS/ G(10000),H(10000),FN(10000)
C DATA H(1)/0.0/,G(1)/0.0/,FN(1)/0.0/
C DATA ERROR/0.0001/,MAXIT/100/
C -----OUTPUT FORMATS-----
1000 FORMAT(1X,4A)
1010 FORMAT(' ETA INFINITY ?')
1100 FORMAT(' F^ AT ETA INFINITY ?')
1030 FORMAT(' DELTA ETA INCREMENT (MINIMUN ALLOWED='F7.5,')')
1050 FORMAT(' INITIALIZING...')
    
```

```

1060 FORMAT(' ITERATION #...',I4)
1070 FORMAT(' PRINTING...')
6060 FORMAT(' CONVERGENCE HAS BEEN OBTAINED')
6070 FORMAT(' MAXIMUM NUMBER OF ITERATION HAS BEEN REACHED WITH NO CONV
    1ERGENCE')
6100 FORMAT(10X,'X',12X,'F',15X,'F^',13X,'F^^')
6110 FORMAT('  F^^ SUPOSED=',E15.8,5X,)
6120 FORMAT(' DATA INGRESED:')
6170 FORMAT(' -----')
6130 FORMAT(' ETA INFINITY =',E15.8)
6140 FORMAT(' F^ AT ETA INFINITY =',E15.8)
6150 FORMAT(' DELTA ETA INCREMENT =',E15.8)
6180 FORMAT(' NAME OF THE OUTPUT FILE?')

C  -----INPUT FORMATS-----
1080 FORMAT(A12)
C  -----
C
    WRITE(*,1000) CHAR(27),['I','2','J']
100 WRITE(*,1010)
    READ(*,ERR=100) FIN
140 WRITE(*,1100)
    READ(*,ERR=140) Z_INFINITY
110 WRITE(*,1030) FIN/10000
    READ(*,ERR=110) DETA
    WRITE(*,1000) CHAR(27),['I','2','J']

C
C  INITIALIZING...
C
C  Z IS F'
C  ZP IS F"

    WRITE(*,1050)
    ITER=0
    NEDGE=NINT(FIN/DETA)+1
    Z(1)=0.0
    Z(NEDGE)=Z_INFINITY
    DELTA_Y=Z_INFINITY/NEDGE
    DO 2100 I=2,NEDGE-1
        Z(I)=(I-1)*DELTA_Y
2100 CONTINUE
    CALL INTEGRATION(DETA,NEDGE,Z)
    CALL DF_DETA(NEDGE,Z,DETA,ZP)
    ZPPREV=ZP(1)

C  CALCULATING...

10 CONTINUE
    WRITE(*,1000) CHAR(27),['I','2','J']
    ITER=ITER+1
    WRITE(*,1060) ITER
    CALL THOMAS(DETA,NEDGE,Z)
    CALL INTEGRATION(DETA,NEDGE,Z)
    CALL DF_DETA(NEDGE,Z,DETA,ZP)
    IF(ABS(ZP(1)-ZPPREV).GE.ERROR.AND.ITER.LE.MAXIT)
1THEN
        ZPPREV=ZP(1)
        GOTO 10
    ENDIF
    IF(ITER.LE.MAXIT)
1THEN
C  PRINTING...ON SCREEN
        WRITE(*,1000) CHAR(27),['I','2','J']
        CALL RESULTS_PRINTING(0,DETA,NEDGE,FN,Z,ZP,ITER)
        WRITE(*,6060)

C  PRINTING...IN A FILE
150 WRITE(6,6180)
        READ(6,1080,ERR=150) FILE_NAME
    
```

```

OPEN(7,FILE=FILE_NAME)
WRITE(7,6120)
WRITE(7,6170)
WRITE(7,*)
WRITE(7,6130) FIN
WRITE(7,6140) Z_INFINITY
WRITE(7,6150) DETA
WRITE(7,*)
CALL RESULTS_PRINTING(7,DETA,NEDGE,FN,Z,ZP,ITER)
CLOSE(7)
ELSE
WRITE(*,6070)
ENDIF
STOP
END
*****
SUBROUTINE RESULTS_PRINTING(NU,DETA,NEDGE,F,FP,FPP,ITER)

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON/INPUT/ FIN
DIMENSION F(10000),FP(10000),FPP(10000)

C -----OUTPUT FORMATS-----
1000 FORMAT(' SOLUTION OF BLASIUS EQUATION BY FINITE DIFFERENC
1ES')
1010 FORMAT(' -----
1--')
1020 FORMAT(5X,'ETA',12X,'F',20X,'F^',20X,'F^^')
1030 FORMAT(1X,F6.3,5X,E15.8,10X,E15.8,10X,E15.8)
1040 FORMAT(' NUMBER OF ITERATIONS= ',I2)
C -----
WRITE(NU,1000)
WRITE(NU,1010)
WRITE(NU,*)
WRITE(NU,1020)
WRITE(NU,*)
WRITE(NU,1030) 0.0,F(1),FP(1),FPP(1)
J=1
DO 2000 I=2,NEDGE
Y=(I-1)*DETA
IF (ABS(Y-(J*0.10)).LE.0.000001)
1THEN
WRITE(NU,1030) Y,F(I),FP(I),FPP(I)
J=J+1
END IF
2000 CONTINUE
WRITE(NU,*)
WRITE(NU,1040) ITER
RETURN
END
*****
SUBROUTINE THOMAS(DETA,NEDGE,ZN)
C
C THOMAS ALGORITHM
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ZN(10000)
COMMON/INPUT/FIN
COMMON/VARS/ G(10000),H(10000),FN(10000)
C
DO 2100 I=1,NEDGE-1
A=1/(DETA**2)+(FN(I)/(4*DETA))
B=-2/(DETA**2)
C=1/(DETA**2)-(FN(I)/(4*DETA))
D=0
DEN=B+C*H(I)
G(I+1)=(D-C*G(I))/DEN
H(I+1)=-A/DEN
2100 CONTINUE
DO 200 I=1,NEDGE

```

```
J=NEDGE-I
ZN(J)=G(J)+H(J)*ZN(J+1)
200 CONTINUE
RETURN
END
*****
SUBROUTINE INTEGRATION(DETA,NEDGE,Z)
C
C  TRAPEZOIDAL RULE FOR NUMERICAL INTEGRATION
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  DIMENSION Z(10000)
  COMMON/VARS/ G(10000),H(10000),FN(10000)
  DO 2110 I=2,NEDGE
    FN(I)=FN(I-1)+0.5*DETA*(Z(I)+Z(I-1))
  2110 CONTINUE
  RETURN
  END
*****
SUBROUTINE DF_DETA(NEDGE,F,X,FP)
C
C  DERIVATIVE OF F FOR BLASIUS' EQUATION
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  DIMENSION F(10000),FP(10000)

  DO 2100 I=1,NEDGE-2
    FP(I)=- (3.0*F(I)-4*F(I+1)+F(I+2))/(2.0*X)
  2100 CONTINUE
  RETURN
  END
*****
SUBROUTINE VECTOR_PRINTING(NU,M,A)

  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  DIMENSION A(10000)
  OPEN(NU)
  1000 FORMAT(E15.8)
  DO 100 I=1,M
    WRITE(NU,1000) A(I)
  100 CONTINUE
  CLOSE(NU)
  RETURN
  END
```

Para determinar el espesor de la capa límite, podemos buscar en el eje de las abscisas (η) de la Figura 2.7 el valor correspondiente al 99% de la velocidad de la corriente libre. Sin embargo, también podemos hacer uso de los resultados obtenidos por el programa como se presentan en la siguiente Tabla.

Tabla 2.2 Valores de $f(\eta)$ para la capa límite sobre una placa plana.

η	f	f'	f''
.000	.00000000E+00	.00000000E+00	.33188893E+00
.200	.66376354E-02	.66374189E-01	.33181662E+00
.400	.26546476E-01	.13269745E+00	.33130651E+00
.600	.59704662E-01	.19883853E+00	.32992285E+00
.800	.10605544E+00	.26458015E+00	.32724357E+00
1.000	.16549032E+00	.32962327E+00	.32287573E+00
1.200	.23783344E+00	.39359480E+00	.31647585E+00
1.400	.32282791E+00	.45605989E+00	.30777359E+00
1.600	.42012505E+00	.51653895E+00	.29659613E+00
1.800	.52927758E+00	.57452947E+00	.28289023E+00
2.000	.64973754E+00	.62953165E+00	.26673830E+00
2.200	.78085961E+00	.68107638E+00	.24836491E+00
2.400	.92191005E+00	.72875333E+00	.22813133E+00
2.600	.10720811E+01	.77223665E+00	.20651683E+00
2.800	.12305101E+01	.81130562E+00	.18408739E+00
3.000	.13963020E+01	.84585806E+00	.16145488E+00
3.200	.15685534E+01	.87591493E+00	.13923118E+00
3.400	.17463773E+01	.90161575E+00	.11798278E+00
3.600	.19289254E+01	.92320545E+00	.98191489E-01
3.800	.21154073E+01	.94101435E+00	.80225826E-01
4.000	.23051051E+01	.95543378E+00	.64325694E-01
4.200	.24973832E+01	.96688993E+00	.50600982E-01
4.400	.26916926E+01	.97581881E+00	.39042499E-01
4.600	.28875706E+01	.98264431E+00	.29542173E-01
4.800	.30846365E+01	.98776091E+00	.21918648E-01
5.000	.32825847E+01	.99152177E+00	.15944348E-01
5.200	.34811753E+01	.99423203E+00	.11370734E-01
5.400	.36802246E+01	.99614685E+00	.79494147E-02
5.600	.38795949E+01	.99747306E+00	.54479098E-02
5.800	.40791855E+01	.99837351E+00	.36598316E-02
6.000	.42789243E+01	.99897281E+00	.24100208E-02
6.200	.44787608E+01	.99936381E+00	.15556206E-02
6.400	.46786605E+01	.99961387E+00	.98425202E-03
6.600	.48786002E+01	.99977063E+00	.61041681E-03
6.800	.50785647E+01	.99986696E+00	.37107595E-03
7.000	.52785444E+01	.99992499E+00	.22111307E-03
7.200	.54785331E+01	.99995925E+00	.12914595E-03
7.400	.56785272E+01	.99997908E+00	.73936974E-04
7.600	.58785242E+01	.99999033E+00	.41491286E-04
7.800	.60785230E+01	.99999659E+00	.22822666E-04
8.000	.62785227E+01	.10000000E+01	.00000000E+00

De esta forma, e interpolando para $f' = 0.99$, le corresponde un valor de 4.96 aproximadamente. Por lo tanto, despejando el valor del espesor de la capa límite podemos escribir:

$$\delta(x) = 4.96 \sqrt{\frac{x}{Re_x}}$$

donde Re_x es el número local de Reynolds dado por la expresión:

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

El coeficiente local de arrastre o coeficiente local de fricción esta definido por el cociente entre los esfuerzos de corte sobre la placa y la cabeza de presión dinámica, esto es:

$$C_{Dx} = \frac{\tau}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}}$$

Para hallar los esfuerzos de corte sobre la placa plana necesitamos evaluar el gradiente de velocidades. Esto se puede hacer tomando la tangente a la curva u_x/u_∞ de la Figura 2.7 en $y = 0$, lo cual esta representado por la función derivada segunda $f''(\eta)$ (o bien a partir de los datos de la Tabla 2.2):

$$\left[\frac{\delta(u_x/u_\infty)}{\delta\left(y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\right)} \right]_{y=0} = f''(\eta) = 0.332$$

Entonces, despejando el gradiente de velocidades llegamos a que los esfuerzos de corte sobre la placa están dados por la siguiente ecuación:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0.332 \mu \frac{u_\infty}{x} \sqrt{Re_x}$$

Reemplazando en la definición del coeficiente local de arrastre (ecuación 2.30) obtenemos la expresión:

$$C_{Dx} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

Capa límite térmica sobre una placa plana: Solución de Blasius

Para encontrar la solución para la capa límite térmica en forma exacta y conocer el gradiente de temperaturas sobre la superficie, necesitamos resolver, además de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, la ecuación de energía:

$$u_x \frac{\delta T}{\delta x} + u_y \frac{\delta T}{\delta y} = \alpha \frac{\delta^2 T}{\delta y^2}$$

Dada la semejanza que existe entre las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía, podemos usar variables de similitud. Sin embargo, para que el principio de similitud se pueda aplicar a la capa límite térmica, las condiciones de frontera deben ser las mismas. Por lo tanto, para que esto se cumpla es necesario adimensionalizar las variables para obtener las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{array}{lll} \text{en } y = 0 & u_x/u_\infty = 0 & (T_s - T)/(T_s - T_\infty) = 0 \\ \text{en } y \rightarrow \infty & u_x/u_\infty = 1 & (T_s - T)/(T_s - T_\infty) = 1 \\ \text{en } x = 0 & u_x/u_\infty = 1 & (T_s - T)/(T_s - T_\infty) = 1 \end{array}$$

Para que las capas límites fluido dinámica y térmica coincidan, suponemos que el número de Prandtl es igual a uno. Entonces, empleando la variable de similitud η , tal como fuera definida en la ecuación (2.24) y con la expresión:

$$f'(\eta) = \frac{u_x}{u_\infty} = \frac{T_s - T}{T_s - T_\infty}$$

se puede obtener nuevamente la ecuación de Blasius (ecuación 2.27) cuyo resultado ya ha sido presentado en forma gráfica en la Figura 1. Como consecuencia de haber especificado que el número de Prandtl sea igual a uno, podemos escribir que:

$$\frac{d\left(\frac{u_x}{u_\infty}\right)}{d\left(\frac{y}{x}\sqrt{Re_x}\right)} = \frac{d\left(\frac{T_s - T}{T_s - T_\infty}\right)}{d\left(\frac{y}{x}\sqrt{Re_x}\right)} = \frac{df'(0)}{d\eta} = f''(\eta = 0)$$

Para casos mas generales, en que los espesores de las capas límites fluido dinámica y térmica no coincidan, Pohlhausen relacionó los espesores de las mismas con el número de Prandtl:

$$\frac{\delta(x)}{\delta_t(x)} = Pr^{1/3}$$

Incluyendo la ecuación 2.39 en la expresión del parámetro η , la misma toma la siguiente forma:

$$\eta = \frac{y}{x} Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

Para hallar el gradiente de temperaturas, Pohlhausen presentó una solución gráfica a partir de la cual obtuvo

$$f''(\eta = 0) = \frac{d\left(\frac{T_s - T}{T_s - T_\infty}\right)}{d\left(\frac{y}{x} Re_x^{1/2} Pr^{1/3}\right)} = 0.332$$

Por lo tanto, puesto que el flujo de calor en la superficie de la placa requiere que se cumpla la siguiente condición:

$$h_x(T_s - T_\infty) = -k \frac{dT}{dy}$$

Despejando el gradiente de temperaturas a partir de la ecuación (2.41), reemplazando en la ecuación (2.42) y despejando el coeficiente local de transferencia de calor por convección, obtenemos:

$$h_x = 0.332 \frac{k}{x} Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

o bien, en función del número local de Nusselt:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

La expresión de la ecuación (2.44) es válida para números de Prandtl comprendidos entre 0.6 y 50. Puesto que ésta ecuación nos representa valores locales del coeficiente convectivo, valores promedio de este coeficiente se pueden calcular por integración de los coeficientes locales a lo largo de las dimensiones de la placa:

$$h_L = \frac{1}{A} \int h_x dA = \frac{1}{L} \int_0^L 0.332 \frac{k}{x} Re_x^{1/2} Pr^{1/3} dx$$

Finalmente, el resultado de la integral en la ecuación (2.45) expresado en función del número de Nusselt es:

$$Nu_L = \frac{h_L L}{k} = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$$

Como se puede observar, comparando ésta ecuación con la expresión obtenida para la ecuación (2.44), el número de Nusselt promedio es igual al doble del número local de Nusselt evaluado en $x = L$.