FACULTAD DE INGENIERÍA
Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco

CURSO PREUNIVERSITARIO DE MATEMÁTICA

2025

ifiunp@gmail.com

La elaboración de este material estuvo a cargo de los siguientes docentes de la Facultad de Ingeniería de la sede Comodoro Rivadavia:

- Prof. Álvarez, Carlos
- Ing. Grunberg, Érica
- Prof. Martínez, Gabriela
- Prof. Nuñez, Raquel
- Prof. Ruiz, Mariela
- Ing. Valer, Aldo

Revisión Cátedra de Ingreso:

- Lic. Da Luz Pereira, Llanet
- Lic. Tapia, Julieta
- Ing. Villarroel, Marcela

ifi

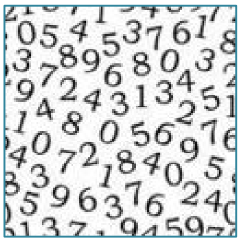
ifiunp@gmail.com

ÍNDICE

ifi

ifiunp@gmail.com

NÚMEROS



Números Naturales

Los números naturales sirven para contar, ordenar y enumerar objetos.

Así, decimos que la Tierra es el tercer planeta a partir del Sol, que ésta es la primera unidad del Módulo del Ingreso, etc.

Definición ***¡Para leer y recordar!***

A los números que utilizamos para contar la cantidad de elementos de un conjunto no vacío se los denomina **números *naturales***.

Designamos con $\mathbb{N}$ al conjunto de dichos números,

$$\mathbb{N} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \ldots \}$$

Es claro que la suma y el producto de dos números naturales es un número natural. En símbolos,

Si $a , b \in \mathbb{N}$ entonces $a + b \in \mathbb{N}$ y $a \cdot b \in \mathbb{N}$.

Observemos que...

$1 - 1 = 0 \notin \mathbb{N}$

$1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$

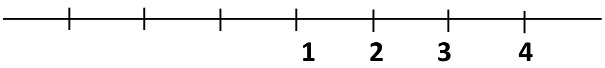
$3 - 1 = 2 \in \mathbb{N}$

Sin embargo, no siempre la diferencia de dos números Naturales, es un número natural. Así,

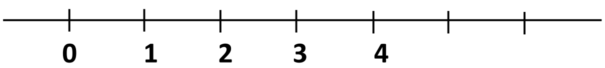
Si $a , b \in \mathbb{N}$ y $b < a$ entonces $a - b \in \mathbb{N}$.

Los números naturales están ordenados.

Podemos representarlos en la recta numérica como sigue:



- Si al conjunto de los números naturales le agregamos el número cero, obtenemos un nuevo conjunto que representamos:



-Por otro lado, si reemplazamos cada elemento del conjunto de los números naturales por su opuesto, es decir, en lugar de 1 escribimos -1, en lugar de 2 escribimos -2, y así siguiendo, obtenemos un nuevo conjunto con los *números opuestos* a los números naturales.

¡Para leer y recordar!

Definición

Designamos con $\mathbb{N}_o$ al conjunto de los naturales incluyendo al número 0.

$\mathbb{N}_o$ = **{ 0; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ... }**... es decir: $\mathbb{N}_o = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definición

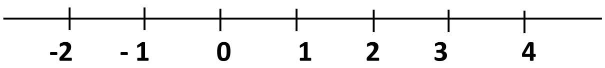
Designamos con $\mathbb{N}^-$ al conjunto de los números opuestos a los números naturales.

$\mathbb{N}^- = \{-1 ; -2 ; -3 ; -4 ; -5 ; \ldots\}$ ... o bien $\mathbb{N}^- = \{ -a \,/\, a \in \mathbb{N} \}$

- $a \in \mathbb{N}$ si y sólo si $-a \in \mathbb{N}^-$
- $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^- = \varnothing$, es decir: no existe un número que pertenezca al conjunto $\mathbb{N}$ y al conjunto $\mathbb{N}^-$ simultáneamente.

  El símbolo $\varnothing$ denota al "conjunto vacío".

Si agregamos estos nuevos elementos al gráfico anterior, resulta:



El conjunto que hemos obtenido de esta manera define los:

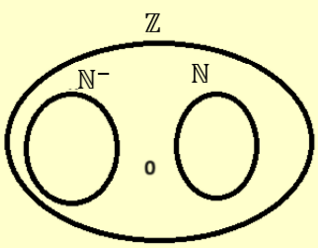
Números Enteros

Definición:

¡Para leer y recordar!

Definimos al conjunto de los números *enteros* como:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$



De inmediato resulta que *todo número natural es un número entero*.

Ejercicio 1: En cada caso, representa en la recta numérica los números indicados y analiza:

a) ¿Existe un número entero que sea menor o igual que todos los demás? y ¿mayor o igual?

b) ¿Cuántos enteros existen entre los números consecutivos 2 y 3?, ¿y entre 5 y 6?

¿y entre $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{n+1}$?

c) ¿Cuántos enteros existen entre 2 y 10?, ¿y entre -3 y 7?

¿Qué puede afirmarse sobre la cantidad de enteros que existen entre dos enteros dados?

Algunas propiedades de los Números Enteros

$-2 \in \mathbb{Z}$ implica $-(-2) = 2 \in \mathbb{Z}$

$4, -5 \in \mathbb{Z}$ implica $4 + (-5) = -1 \in \mathbb{Z}$

$4, -5 \in \mathbb{Z}$ implica $4 - (-5) = 9 \in \mathbb{Z}$

$4, -5 \in \mathbb{Z}$ implica $4 \cdot (-5) = -20 \in \mathbb{Z}$

- *Si* $b \in \mathbb{Z}$ implica $-b \in \mathbb{Z}$
- *Si* $a, b \in \mathbb{Z}$ implica $a + b \in \mathbb{Z}$
- *Si* $a, b \in \mathbb{Z}$ implica $a - b \in \mathbb{Z}$, pues: $a - b = a + (-b)$;
  como $-b \in \mathbb{Z}$; por lo anterior resulta $a + (-b) \in \mathbb{Z}$.
- *Si* $a, b \in \mathbb{Z}$ implica $a \cdot b \in \mathbb{Z}$

Algoritmo de la División entre Números Enteros

¿Qué ocurre con la división entre dos números enteros? ¿Será el cociente también un entero?

A través de este ejemplo vemos que $7 : 2 = 3{,}5 \notin \mathbb{Z}$ *¿puedes proponer otros ejemplos?*

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} b & a \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Por lo tanto, **no siempre la división de dos números enteros es un número entero.**

Al realizar una división entre dos números enteros, puede que el resto sea distinto de cero.

¡Para leer y recordar!

Algoritmo de la División entre números enteros

Sean $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{a} \neq 0$.

Existen enteros únicos $\boldsymbol{q, r}$ tales que $\boldsymbol{b = a \cdot q + r}$ con $0 \leq \boldsymbol{r} < |\boldsymbol{a}|$

Donde $|a|$ denota al "valor absoluto" del número $\boldsymbol{a}$.

Ejemplos:

a) Para $b = 84$, $a = 45$ resultan: $q = 1$, $r = 39$, pues $84 = 45 \cdot 1 + 39$

b) Para $b = 84$, $a = -45$ resultan: $q = -1$, $r = 39$, pues $84 = (-45) \cdot (-1) + 39$

c) Para $b = -84$, $a = 45$ resultan: $q = -2$, $r = 6$, pues $-84 = 45 \cdot (-2) + 6$

d) Para $b = -84$, $a = -45$ resultan: $q = 2$, $r = 6$, pues $-84 = (-45) \cdot 2 + 6$

Divisibilidad de Números Enteros

Definición **_¡Para leer y recordar!_**

Si $r = 0$, resulta $b = a \cdot q$ y se dice que ***a divide a b***

(o que ***b*** *es múltiplo de* ***a*** , o que *b es divisible por* ***a*** , o que ***a*** *es divisor de* ***b***).

Ejemplos:

a) 2 divide a 6 pues $6 = 2 \cdot 3 + 0$, luego $r = 0$

b) 5 no divide a 12 pues no existe ningún entero que multiplicado por 5 dé 12: o expresado de otra forma, $12 = 5 \cdot 2 + 2$, de modo que $r = 2$.

Ejercicio 2: Efectúa las siguientes operaciones:

a) $5 - (-2) + (-8) : (-4) – 5$

b) $7 - (-3) - (-8) : (-8) + (-3) : (-1)$

c) $6 : (-2) + (-7) \cdot (-15) : (-3)$

d) $2^2 - 4^2 : 8 + 2^5$

e) $4^2 : 2 - 1 - 8^2 : 2 – 1$

f) $3^2 : 2 - 1 - 3^2 : 2$

g) $3^{-1} \cdot 3 - 3^0 + 1 - 25$

Ejercicio 3: El número - 15 es menor que 3, es decir, $-15 < 3$.

a) ¿Es $(-15)^2$ menor que 3^2?

b) ¿Es $(-15)^3$ menor que 3^3?

Ejercicio 4: El número -12 es menor que -3, es decir, $-12 < -3$.

a) ¿Es $(-12) \cdot 6$ menor que $(-3) .6$?

b) ¿Es $(-12) \cdot (-6)$ menor que $(-3) \cdot (-6)$?

Ejercicio 5:

a) El cociente de dos números es 9, ¿cuál es el cociente de sus cuadrados?

b) El cociente de dos números es 9, ¿cuál es el cociente de sus cubos?

Ejercicio 6:

Dadas las siguientes afirmaciones, señala cuáles son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F). Da un contraejemplo en caso de ser falso.

a) Si $z \in \mathbb{Z}$ entonces $-z \in \mathbb{Z}$.

b) Si $z^2 \in \mathbb{Z}$ entonces $z \in \mathbb{Z}$.

c) Si $2z \in \mathbb{Z}$ entonces $z \in \mathbb{Z}$.

d) Si $z^2 = 1$ entonces $z \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 7:

a) Sean a y b enteros, $b \neq 0$. Si $a - b = 175$ y la división de a por b tiene cociente 15 y resto 7, halla a y b.

b) Si se divide un número natural a por 2 se obtiene como cociente entero un número que llamamos b y r = 0 (r : resto) . Al dividir b por 2 obtenemos como cociente entero un número c y r = 1. Luego dividimos c por 2 y en este caso el cociente es 1 y r = 0. ¿Cuál es el número a?

Números Primos

Definición

Un número entero a es ***primo*** si tiene exactamente cuatro divisores: **1, -1, *a* y - *a*.**

Máximo Común Divisor

¡Para leer y recordar!

Definición

Si se descomponen dos números enteros positivos a y b en sus factores primos, el ***máximo común divisor*** entre a y b, es el producto de los factores primos comunes, con el menor exponente. Se denota: **mcd (*a* ; *b*).**

Ejemplo: Si $a = 72$ y $b = 84$ resulta

Recordemos que...
Para realizar la descomposición de un número en factores primos comenzamos dividiendo, de ser posible, por los números primos 2, 3, 5, 7, 11,…
hasta obtener el número 1.
La segunda columna obtenida presenta la descomposición del número en factores primos.

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1/	

84	2
42	2
21	3
7	7
1/	

$\mathbf{72 = 2^3 \cdot 3^2}$ $\mathbf{84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7}$

$$\mathbf{mcd\ (72 ; 84) = 2^2 \cdot 3 = 12}$$

o sea: 12 es el mayor de los divisores comunes entre 72 y 84.

Mínimo Común Múltiplo

¡Para leer y recordar!

Definición:

Si se descomponen dos números enteros positivos ***a*** y ***b*** en sus factores primos,

El ***mínimo común múltiplo*** entre ***a*** y ***b*** es el producto de los factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente.

Se denota: **mcm (*a* ; *b*).**

Ejemplo: Tomando los números del ejemplo anterior resulta el **mcm (72 ; 84) =** $\mathbf{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504}$

… o sea: 504 es el menor de los múltiplos comunes entre 72 y 84.

Ejercicio 8:

a) Hallar el mínimo común múltiplo entre 8 y 14.

b) Hallar el máximo común divisor entre 544 y 1492.

Ejercicio 9:

En el país ABC las elecciones presidenciales son cada 6 años, las de gobernadores son cada 4 años y las de senadores cada 8 años. En 1974 coincidieron las elecciones de presidente, gobernadores y senadores. ¿Cuándo volverán a coincidir?

Ejercicio 10:

Tengo cierta cantidad de botones. Si los agrupo en montones de a cuatro, queda uno suelto. Si los agrupo de a tres, también queda uno suelto y lo mismo sucede si los coloco de a dos. Cuando los pongo en grupos de a cinco no me sobra ninguno.

a) Si tengo menos de 30 botones, ¿cuántos tengo?

b) Si tengo más de 50 botones y menos de 100, ¿cuántos tengo?

Ejercicio 11:

Tres hombres recorren 28, 35 y 40 kilómetros por día respectivamente.

a) ¿A qué distancia del punto de partida está el lugar más cercano al que pueden llegar los tres simultáneamente, en un número entero de días?
b) ¿Cuántos días empleará cada uno en llegar a él?

Números Racionales

¡Para leer y recordar!

Definición:

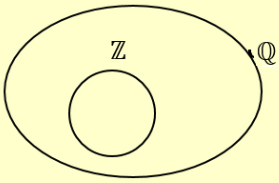
Llamamos **número *racional*** a todo número que se puede

Expresar como fracción $\frac{n}{m}$ donde n y m son enteros y $m \neq 0$.

-Con $\mathbb{Q}$ denotamos al conjunto de los números racionales.

-Todo número entero es racional, pues si $m \in Z$ escribimos $m = \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$.

- Es decir: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



Algunas propiedades de los Números Racionales

La suma, la diferencia y el producto de dos números racionales es un número racional.

El inverso de cualquier número racional no nulo, es racional.

Si $u, v \in \mathbb{Q}$:

- $u + v \in \mathbb{Q}$
- $u - v \in \mathbb{Q}$
- $u \cdot v \in \mathbb{Q}$
- Si $u \neq 0$ entonces $\frac{1}{u} \in \mathbb{Q}$

Ejercicio 12: Analiza y responde teniendo en cuenta la definición de Números Racionales.

a) Todo número entero puede expresarse como un número racional. ¿Es cierta la recíproca de esta afirmación? Considera como caso a analizar el número entero 2.

b) ¿Existe un número racional que sea menor o igual que todos los demás?, y ¿mayor o igual que todos los demás?

c) Halla un número racional entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{7}$. Halla un número racional entre $\frac{7}{3}$ y $\frac{8}{3}$.

¿Puede hallarse más de un número racional en cada caso? ¿Qué puedes concluir?

Expresiones Fraccionarias y Decimales

Los números racionales se expresan en diferentes formas. Por ejemplo, el número racional tres cuartos puede expresarse como:

$$\underbrace{\frac{3}{4} = \frac{-3}{-4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{75}{100}}_{\textit{forma fraccionaria}} = \underbrace{0{,}75 = 0{,}750 = \ldots}_{\textit{forma decimal}}$$

Todo número racional puede expresarse como número *decimal exacto* o *periódico*.

Cada parte de un número decimal tiene un nombre especial:

- La cifra a la izquierda de la coma se denomina ***parte entera***.
- La cifra a la derecha de la coma, que se repite, es la ***parte decimal periódica***.
- La cifra a la derecha de la coma, que no se repite, es la parte decimal ***no periódica.***

Ejemplos:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ es un número decimal exacto, pues no tiene cifras decimales periódicas.

$\frac{2}{3} = 0{,}666666\ldots$ es un número decimal periódico puro pues tiene cifras decimales periódicas

$\frac{142}{45} = 3{,}15555555\ldots$ es un número decimal periódico mixto pues tiene cifras decimales periódicas y no periódicas.

Ejercicio 13:

Identifica la parte entera y la parte decimal periódica o no periódica de las siguientes expresiones decimales:

a) $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0,\hat{3}$

b) $\frac{86}{11} = 7{,}818181\ldots = 7,\widehat{81}$

c) $\frac{29}{6} = 4{,}8333\ldots = 4{,}8\hat{3}$

A continuación, recordaremos cómo pasar de la forma decimal a la forma fraccionaria.

FORMA DECIMAL		EJEMPLO	OBSERVACIÓN
Exactas		$0{,}75 = \frac{75}{100}$	En el numerador aparece la parte decimal, y en el denominador aparece el 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales hay.
Periódicas	**Puras**	$0{,}2525... = 0,\widehat{25} = \frac{25}{99}$	En el numerador aparece la parte periódica, mientras que en el denominador aparecen tantos números 9 como cifras tiene el período.
	Mixtas	$0{,}75454... = 0{,}7\widehat{54} = \frac{754-7}{990} = \frac{747}{990}$	En el numerador aparece la diferencia entre la parte decimal y la parte decimal **<u>no</u>** periódica, mientras que en el denominador tenemos tantos números 9 como cifras tiene el período seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

Más ejemplos:

FORMA DECIMAL		EJEMPLO
Exactas		$\mathbf{0{,}015} = \frac{15}{1000}$ $\mathbf{2{,}23} = \frac{223}{100}$
Periódicas	**Puras**	$\mathbf{0{,}333...} = \mathbf{0,\widehat{3}} = \frac{3}{9}$ $\mathbf{1{,}282828...} = \mathbf{1,\widehat{28}} = \mathbf{1} + \frac{28}{99} = \frac{127}{99}$
	Mixtas	$\mathbf{0{,}8333...} = \mathbf{0{,}8\widehat{3}} = \frac{83-8}{90} = \frac{75}{90}$ $\mathbf{12{,}75454...} = \mathbf{12{,}7\widehat{54}} = \mathbf{12} + \frac{754-7}{990} = \mathbf{12} + \frac{747}{990} = \frac{12627}{990}$ $\mathbf{5{,}12444...} = \mathbf{5{,}12\widehat{4}} = \mathbf{5} + \frac{124-12}{900} = \mathbf{5} + \frac{112}{900} = \frac{4612}{900}$

Ejercicio 14: Calcula:

a) $\frac{3}{5}:\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}:\frac{3}{7}$ b) $\left(\frac{2}{3}+\frac{-7}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)$

Ejercicio 15: Escribe en forma decimal y en forma fraccionaria:

a) 5 décimos b) 5 centésimos c) 123 centésimos d) 82 milésimos

Ejercicio 16: a) ¿De qué número es 200 la quinta parte?
b) ¿De qué número es 850 el 52%?

Ejercicio 17: Expresa en forma fraccionaria y resuelve:

a) $\frac{(1{,}2+1{,}8)^2}{1{,}5}-\frac{6}{(1{,}5-0{,}3)^2-0{,}24}$ b) $\frac{\left(\sqrt{0{,}09}+\frac{1}{2}+0{,}7\right)^2-\left(0{,}7-\frac{1}{5}\right)^2}{\frac{3}{2}-\sqrt{0{,}25}}$

c) $0{,}0\widehat{9}:0{,}\widehat{3}-0{,}1^2:0{,}3-\sqrt{0{,}0\widehat{5}\,.\,2}+0{,}\widehat{5}\,.\,3{,}3-0{,}1$ d) $\frac{\sqrt{4+0{,}\widehat{3}-1{,}\widehat{5}}\,.\left(0{,}1\widehat{9}-0{,}\widehat{3}\right)}{\left(0{,}3\widehat{2}-0{,}2\widehat{1}\right)}$

e) $\left(0,\widehat{35}:0,\widehat{15}+\frac{1}{4}\right).\left(0{,}00\hat{2}:0{,}00\hat{7}+1\right)=$ f) $\left(3-\frac{1}{5}:0{,}7\right).\left(\frac{15}{4}.0,\hat{2}\right)=$

g) $-\left(0,\hat{4}\,.\frac{11}{8}+2\right)+\left(0,\hat{2}+1,\hat{1}\right).3{,}5=$ h) $\left(0,\widehat{18}+0,\widehat{21}\right):\left(0,\hat{2}+0,\widehat{05}\right)+0,\hat{3}=$

Ejercicio 18: Al tostarse el café, éste pierde un quinto de su peso. Si se tuestan 80 kg., ¿cuánto pesan después?

Ejercicio 19: El agua al congelarse aumenta su volumen un décimo del mismo. ¿Qué volumen ocupan 200 litros de agua después de helarse?

Ejercicio 20: Una aleación está compuesta por $\frac{24}{29}$ de cobre, $\frac{4}{29}$ de estaño y $\frac{1}{29}$ de cinc. ¿Cuántos kilogramos de cada metal habrá en 348 kg de aleación?

Ejercicio 21: Un curso tiene 32 alumnos. Para colaborar en la organización de un acto fue convocada a concurrir 1 hora antes del inicio la cuarta parte del curso. De los que se esperaban sólo asistió la mitad. Tomando como unidad el curso ¿cómo expresaría la parte del curso que asistió?

Números Irracionales

Definición

¡Para leer y recordar!

-Un ***número irracional*** ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) es todo aquel que *no puede expresarse como cociente de dos números enteros*.

Es decir: un número irracional, al ser expresado como decimal, *no es exacto ni es periódico*, ***posee infinitas cifras decimales no periódicas***.

Un número irracional muy famoso es el **número de oro** : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

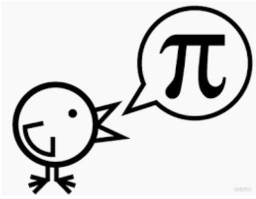
Una manera de obtenerlo es realizar el cociente entre las longitudes de los lados diferentes de las hojas tamaño A4 que comúnmente se utilizan en fotocopiadora, o entre los lados de una tarjeta de crédito.

El número π aparece al calcular la longitud de una circunferencia y el área de un círculo.

El número ***e*** se presenta en procesos de crecimiento de una población animal o vegetal, y en problemas de desintegración radiactiva. Asimismo, en el tendido de cables eléctricos, los cables entre postes determinan una curva en cuya ecuación también está presente el número ***e***.

¿No te parece curioso?

Ejemplos:



a) 0,1234567891011...

La parte decimal de este número irracional es la sucesión de los números naturales.

b) $\pi \cong$ **3,141592654...**

El símbolo $\cong$ indica una aproximación del número. Notemos que también existen otras aproximaciones para π; por ejemplo: 3,14 ; 3,141 ; 3,14159 ; 3,1416 ; ... etc.

c) $\sqrt{2} \cong 1,4141135$ ...

Muchas raíces cuadradas y cúbicas son números irracionales. ¿Te animas a buscar otras?

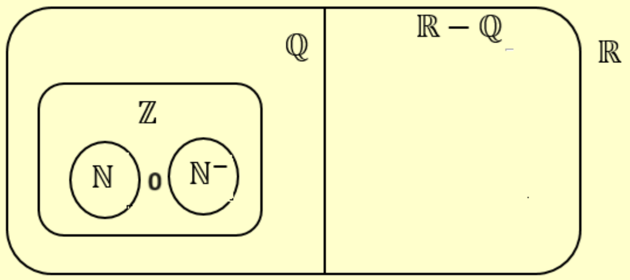
d) $e \cong$ **2,71828....**

Al efectuar cálculos en los que intervienen los números irracionales, tomamos una cantidad finita (entre 3 y 5) de cifras decimales. Por lo tanto, podemos considerar $e \cong 2{,}718$ o bien $e \cong 2{,}71828$.

Números Reales

Definición: ***¡Para leer y recordar!***

La unión del conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales y el conjunto de los números irracionales es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.



-Todos los números que hemos estudiado en las secciones anteriores son números reales.

-El conjunto de los números reales también puede representarse sobre una recta.

-A cada número real le corresponde un único punto de la recta, y cada punto de la recta representa un único número real.   A esta recta la llamamos ***recta real.***

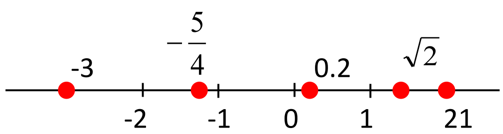
-No siempre somos capaces de representar exactamente a un número real, sin embargo, siempre es posible obtener una representación aproximada de él a partir de su expresión decimal.

Observemos que...

… no existe un número real que sea mayor o igual a todos los demás, ni uno que sea menor o igual que todos los demás.

Además, *entre dos números reales dados cualesquiera existen infinitos números racionales, e infinitos números irracionales*.

Ejemplos: Se representan los números $\sqrt{2}$; - 3 ; 0,2 ; - $\frac{5}{4}$ y 2



Ejercicio 22: Indica cuál de los siguientes números es racional y cuál es irracional.

a) $\frac{3}{5}$ b) 0,494949... c) 3,75   d) 0,141144111444...

e) $\sqrt{7}$ f) 3,2222...   g) 0,437537537... h) 0,101001000100001...

Ejercicio 23: Completa con $\in$ o $\notin$, según corresponda, la siguiente tabla:

Número	**7**	$\sqrt{10}$	**-2,08**	**1,1212212221...**	$\sqrt{25}$	**-2,2424...**	$\sqrt{-4}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{8}{2}$
Natural									
Entero									
Racional									
Irracional									
Real									

Ejercicio 24: Indica si cada enunciado es V (Verdadero) o F (Falso). Justifica los casos Falsos.

a) Todo número real es racional.

b) Todo número natural es entero.

c) Todo número entero es racional.

d) Todo número real es irracional.

Orden en $\mathbb{R}$

Ejercicio 25: Representa en la recta real los siguientes números en forma aproximada:

a) -5

b) $\frac{1}{3}$

c) - $\frac{3}{7}$

d) $\sqrt{5}$

e) π

f) 2,5

Observa que al efectuar las representaciones de estos números, los mismos están ***ordenados*** en la recta numérica. Esto establece lo que llamaremos una ***relación de orden*** entre ellos.

Definición:

¡Para leer y recordar!

Si en $\mathbb{R}$ definimos la relación de orden que indicamos

" < " (menor) observamos que:

Dados dos números reales *a* y *b*, se tiene una y sólo una de las siguientes situaciones:

$$a < b \quad ; \quad b < a \quad ; \quad a = b$$

$-3 < 4 \Leftrightarrow -3+1 < 4+1$

$-3 < 4$ y $2 > 0 \Rightarrow -3 \cdot 2 < 4 \cdot 2$

$-3 < 4$ y $-2 < 0 \Rightarrow -3 \cdot (-2) > 4 \cdot (-2)$

El símbolo $\Leftrightarrow$ se lee "sí y sólo si"

El símbolo $\Rightarrow$ se lee "implica"

Además, se satisfacen las siguientes propiedades:

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a < b$ y $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

Ejercicio 26: Completa la tabla con los signos > ; < ; = según corresponda:

A	*b*	*a* ....*b*	$\frac{a}{2}$...... $\frac{b}{2}$	*a* · (-3) ....*b* · (-3)
8	**2**	8 > 2	$\frac{8}{2} > \frac{2}{2}$	8 · (-3) < 2 · (-3)
-6	**-10**			
-4	**8**			
0	**4**			

Ejercicio 27: Escribe un número comprendido entre los siguientes:

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ b) 1,4142 y 1,4143

c) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ d) π y $\frac{355}{113}$

Potenciación y Radicación en $\mathbb{R}$

Definición ***¡Para leer y recordar!***

Definimos potencia de exponente *n* de un número real *a,* a la expresión

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ veces}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ se denomina ***base*** y $n \in \mathbb{N}$ se denomina ***exponente***.

La definición puede extenderse a exponentes enteros:

Se define para $a \neq 0$ que: $a^0 = 1$ y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejemplos:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$

b) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

c) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

Algunas propiedades importantes que debemos recordar son:

$2^2 \cdot 2^3 = 2^5$	$x^4 \cdot x^{-2} = x^2$
$2^3 : 2^3 = 2^0 = 1$	$x^4 : x^{-2} = x^6$
$(3^{-5})^3 = 3^{-15}$	$(x^{-2})^{-1} = x^2$
$(2 \cdot 5)^{-2} = 2^{-2}\, 5^{-2}$	$(x \cdot y^2)^3 = x^3 y^6$
$(2 : 5)^{-2} = 2^{-2} : 5^{-2}$	$(x : y^2)^3 = x^3 : y^6$

- Producto de potencias con la misma base. $a^m . a^n = a^{m+n}$
- Cociente de potencias con la misma base. $a^m : a^n = a^{m-n}$
- Potencia de una potencia. $(a^m)^n = a^{m.m}$
- Potencia de un producto. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- Potencia de un cociente. $(a : b)^n = a^n : b^n$

¡Para leer y recordar!

Definición:

Definimos la raíz n-ésima de un número real ***a***, a la expresión:

$\sqrt[n]{a}$ **= *b*** **si** ***b**^n^* $b^n = a$, donde n es un número natural.

Denominamos a ***n***: *índice* de la raíz, y a ***a***: *radicando*.

$\sqrt[3]{-27}$ **= -3 pues** $(-3)^3 = -27$

$\sqrt[4]{81}$ **= 3 pues** $3^4 = 81$

No tiene sentido considerar $\sqrt{-4}$ en el conjunto $\mathbb{R}$, dado que no existe un número real tal que elevado al cuadrado nos dé por resultado - 4.

... para que la definición tenga sentido,

-Si ***n*** es impar, ***a*** puede ser cualquier número real,

-Si ***n*** es par, ***a*** debe ser un número real positivo.

$\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[3]{3^7} = 3^{\frac{7}{3}}$ $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$	La raíz n-ésima de un número suele también denotarse como potencia $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Además : $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ si $a \geq 0$

- Si $a < 0$, esta afirmación no siempre tiene sentido, ya que puede ocurrir por ejemplo:

$(-3)^{4/2} = \sqrt{(-3)^4}$ pero $(-3)^{4/2} = ((-3)^{1/2})^4 = \left(\sqrt{-3}\right)^4$ no tiene sentido en el conjunto $\mathbb{R}$.

- También se satisfacen las siguientes propiedades:

$$2 < 3 \;\Rightarrow\; 2^{-1} > 3^{-1} \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{2}{3}$$

$$-\frac{3}{2} < -\frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} > \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow -\frac{2}{3} > -\frac{3}{2}$$

- $a > 0$, $b > 0$ y $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$

- $a < 0$, $b < 0$ y $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$

El siguiente cuadro resume las propiedades que verifican las operaciones de suma, producto, potencia y raíz en $\mathbb{R}$ *y en cada subconjunto de éste.*

OPERACIONES	**PROPIEDADES**		**N**	**Z**	**Q**	**R**
Suma	1. Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	×	×	×	×
	2. Conmutativa	$a + b = b + a$	×	×	×	×
	3. Elemento neutro	0		×	×	×
	4. Elemento opuesto de a	$-a$		×	×	×
Producto	5. Asociativa	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	×	×	×	×
	6. Conmutativa	$a \cdot b = b \cdot a$	×	×	×	×
	7. Elemento neutro	1	×	×	×	×
	8. Elemento inverso de a $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}$			×	×
Suma-Producto	9. Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	×	×	×	×
Potencias	1. Producto de potencias de igual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	×	×	×	×
	2. Cociente de potencias de igual base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	×	×	×	×
	3. Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m.m}$	×	×	×	×
	4. Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	×	×	×	×
	5. Potencia de un cociente	$(a : b)^n = a^n : b^n$	×	×	×	×

Raíces	1. Producto de radicales de igual índice	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	×	×	×	×
	2. Cociente de radicales de igual índice	$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$	×	×	×	×
	3. Raíz de una raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}$	×	×	×	×
	4. Potencia de un radical	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$	×	×	×	×

En virtud de las propiedades que verifican la suma y el producto de números reales,

se dice que **R es un *cuerpo*, y está *ordenado* por la relación de orden <** .

Ejercicio 28: Calcular las siguientes potencias:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^0$ c) 2^{-2} d) $(-3)^{-2}$ e) $(-3)^2$ f) 10^5

Ejercicio 29: Calcular las siguientes expresiones:

a) $x^2 \cdot x^3\ x^5$ b) $(-x)^2 .\ x^5$ c) $x^5 : x^{-5}$ d) $x^{-3} : x^{-6}$

Ejercicio 30: Escribir como radicales los siguientes números:

$2^{1/2}$, $7^{2/3}$, $5^{0,5}$, $12^{0,2}$, $7^{-1/2}$, $9^{-1/3}$, $5^{10/5}$, $8^{-2/3}$

Ejercicio 31: Expresar como potencia fraccionaria.

a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\sqrt{x}:\sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

Ejercicio 32: Simplificar, si es posible.

a) $\sqrt[4]{3^2}$ b) $\sqrt[8]{5^4}$ c) $\sqrt[9]{27}$ d) $\sqrt[5]{1024}$

Ejercicio 33: Extraer factores del radicando.

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{32}$ d) $\sqrt{50}$

Ejercicio 34: Calcular usando propiedades.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$ b) $\sqrt{15}:\sqrt{3}$ c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{15}$ d) $\sqrt[3]{32}:\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$ f) $\sqrt[3]{8}:\sqrt[3]{2}$ g) $\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{5}$ h) $\sqrt{8}:\sqrt[4]{2}$

i) $\sqrt{2}:\sqrt[3]{32}$ j) $\sqrt{3}:\sqrt{4}$ k) $\sqrt{2}\cdot 8^{0,5}$ l) $\sqrt[3]{9}:\sqrt[6]{3}$

Ejercicio 35: Resolver usando propiedades y reduciendo las expresiones.

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80}$

c) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}$

d) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$

Ejercicio 36: Simplificar las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}$

b) $5.\sqrt[3]{5}:\sqrt{\left(\frac{1}{5}.\sqrt[5]{25}\right)^{-\frac{1}{3}}}$

c) $\left(\sqrt{6}\cdot\sqrt[4]{12}\right)^{3}:18^{\frac{1}{2}}$

d) $\dfrac{-100^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{10:\sqrt{0{,}001}}}$

Ejercicio 37: Eliminar las raíces del denominador y simplificar:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Ejercicio 38: Resolver:

a) $\dfrac{16^{1/4}\cdot 27^{1/3}}{4^{1/2}}$

b) $\dfrac{64^{2/3}-27^{1/3}-1}{\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}}$

c) $\left[\dfrac{8^{2/3}-3\cdot 9^{3/2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-(3a)^{0}}\right]^{-2}$ donde $a\neq 0$

Ejercicio 39: Si $a=\sqrt{3}+1,\ b=3-2\sqrt{2}$ y $c=1-\sqrt{3}$, indicar si las afirmaciones que siguen son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta.

I. $a+b$ es un número irracional.

II. $a+c$ es un número irracional

III. $a{\cdot}c$ es un número entero.

IV. $\frac{a}{c}$ es un número racional.

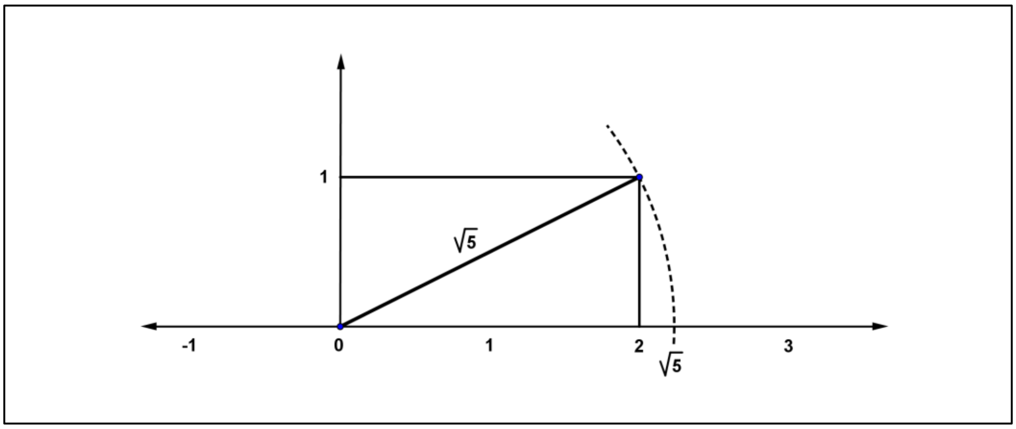
Ejercicio 40: Calcular la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 10 cm. y 12 cm.
Expresa el resultado con dos decimales.

Ejercicio 41: Graficar la siguiente construcción geométrica:

- Trazar un segmento $\overline{AB}$ de longitud 1 unidad.
- Trazar otro segmento $\overline{AC}$ perpendicular a $\overline{AB}$, de longitud 1 unidad.
- Nombrar *O* al punto medio de $\overline{AC}$.Marca la circunferencia de centro *O* y radio $\overline{OC}$.
- Trazar la semirrecta $\overrightarrow{BO}$ y llama *D* al punto de intersección de ésta con la circunferencia más alejado de *B*.

Calcular el valor exacto de la medida del segmento $\overline{BD}$ y verifica que se corresponde con el número de oro.

Ejercicio 42: El siguiente gráfico muestra como representar con regla y compás el número irracional $\sqrt{5}$ en la recta real. Por el mismo método, representa $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{17}$



Ejercicio 43: Calcular el área de un triángulo equilátero cuyos lados miden 10 cm.

Expresa el resultado con tres decimales.

Ejercicio 44: El área de un cuadrado mide 50 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrado construido sobre su diagonal?

Ejercicio 45:
Calcula el área de un círculo de 100 cm. de radio y expresa el resultado con tres decimales exactos.

Números Complejos

No es cierto en general, que la raíz cuadrada de un número real sea siempre un número real.

Por ejemplo, si se quiere resolver una ecuación como la que sigue:

$x^2 + 4 = 0$ encontramos que no existe $a \in$ R tal que $a^2 = -4$.

¡Para leer y recordar!

Definición

La *unidad imaginaria* ***i*** es un número que satisface la propiedad: $\boldsymbol{i^2 = -1}$, también se suele escribir i = $\sqrt{-1}$.

Definición

- A los números de la forma $\boldsymbol{z = a + b\,i}$ donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son reales se les llama ***números complejos***.

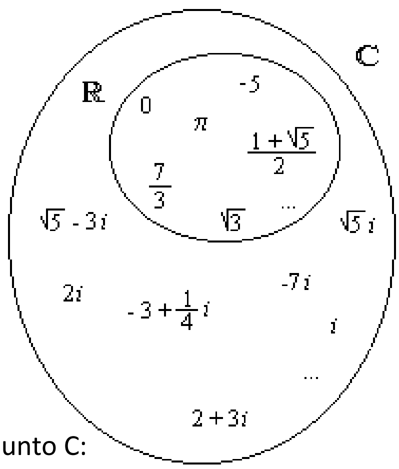
- Al conjunto formado por dichos números se lo denota: $\mathbb{C}$**.**

- En un número complejo $\boldsymbol{z = a + b\,i}$, con $\boldsymbol{a, b \in \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{a}$ se llama ***parte real*** y se la denota con

$\boldsymbol{a = \mathrm{Re}(a + b\,i)}$, $\boldsymbol{b}$ se llama ***parte imaginaria*** y se la denota con $\boldsymbol{b = \mathrm{Im}\,(a + b\,i)}$.

Ejemplo:

z = 2 – 3i ; Re(2 – 3*i*) = 2 ; Im(2 – 3*i*) = -3 (y no – 3i, ¡cuidado!)



Observemos que, para el número complejo *a* + *b i* :

- si *a* = 0, el número complejo solo tiene parte imaginaria, es decir, ***es imaginario puro***.

- si *b* = 0, el número complejo sólo tiene parte real. Por lo tanto, el conjunto de los números reales está incluido en el conjunto de los números complejos : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

De esta forma, la ecuación planteada al comienzo tiene solución en el conjunto C:

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$|x| = \sqrt{-4} = \sqrt{4}.\sqrt{-1}$$

$$|x| = 2\,i$$

$$\boldsymbol{x_1 = 2\,i \qquad x_2 = -2\,i}$$

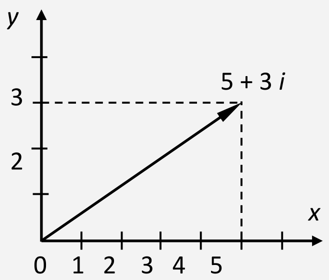
Definición: ***¡Para leer y recordar!***

A dos números complejos se les llama ***conjugados*** si tienen la misma parte real, y opuestas sus partes imaginarias. Se simboliza $\bar{z}$. Es decir:

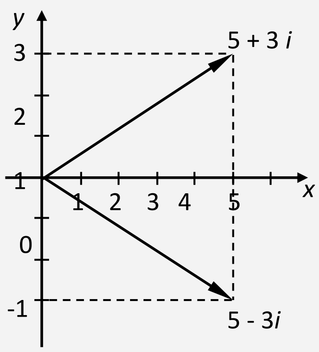
Si z=a +bi es un número complejo, entonces $\bar{z}$=a – bi es el conjugado de z.

Ejemplo: 3 + 2 *i* y 3 - 2 *i* son números complejos conjugados.

Representación de 5 + 3 *i*



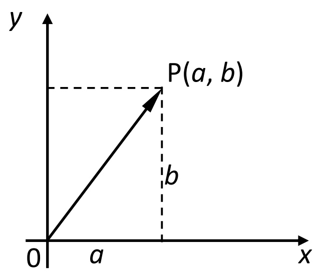
Representación de 5 + 3 *i* y su conjugado 5 – 3 *i*



El número complejo $z = a + b\,i$ se representa en el plano mediante el punto P de coordenadas (a , b) . El eje de las abscisas se llama ***eje real***, y el de las ordenadas, ***eje imaginario***.

De esta forma, a cada número complejo le corresponde un punto del plano y a cada punto del plano le corresponde un número complejo.

Si unimos el origen con el punto P obtenemos un segmento orientado.



Operaciones en C

Suma y Resta	La suma o resta entre números complejos se realiza sumando o restando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí respectivamente.

Ejemplos:

a)(2 + 3 *i*) + (8 - 5*i*)= (2 + 8) + (3 + (- 5)) i = 10 - 2 *i*

b) (2 + 3 *i*) - (8 - 5*i*) = (2 - 8) + (3 - (- 5)) I = - 6 + 8 *i*

Producto	El producto entre dos números complejos se realiza aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y recordando que $i^2 = -1$.
División	La división entre dos números complejos se realiza multiplicando dividendo y divisor por el complejo conjugado del divisor.

Ejemplo: Resolver: $\dfrac{20+30i}{3+i}$

$$\frac{20+30i}{3+i} = \frac{(20+30i).(3-i)}{(3+i).(3-i)} = \frac{60+90i-20i-30i^2}{9-i^2} = \frac{90+70i}{10} = 9+7i$$

El complejo conjugado de $(3+i)$ es $(3-i)$.

Ejercicio 46: Resolver las siguientes operaciones expresando los resultados en forma binómica:

a) $(1-2i)+\left(\dfrac{3}{2}+5i\right)+(-7i)-(-2)$

b) $\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}i\right)\cdot(-5+4i)$

c) $\dfrac{3+4i}{2-i}$

d) $\sqrt{-16}+\sqrt{-25}\sqrt{-1}+\sqrt{49}$

e) $(-1+i)+(3-2i)\cdot(1+3i)$

f) $\dfrac{1-4i}{\sqrt{2}-i}$

Ejercicio 47: Calcular:

a) $Re\left\{2(1-i)^3+3(-2+4i)^2-5\left(\sqrt{3}-2\right)^2\right\}$

b) $\frac{2-3i}{5+i}-(1-4i)^2=$

c) $Im\left\{\dfrac{(1-i)(-2+i)}{\sqrt{3}-2i}\right\}$

Recordemos...

Cuadrado de un binomio	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
	$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
Cubo de un binomio	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
	$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ejercicio 48: Sabemos que $i^2 = -1$. Por lo tanto $i^3 = i^2.i = -i$, y también se tiene que $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

Teniendo esto en cuenta, calcula: $i^5, i^6, i^7, i^8, i^{26}, i^{32}, i^{45}$.

Ejercicio 49: Representar en un mismo gráfico los números complejos $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 5 - 2i$.

Calcular $z_1 + z_2$ y graficar. Observar la relación geométrica entre z_1, z_2 y $(z_1 + z_2)$.

Ejercicio 50: Dado el número complejo $z = a + bi$. Sabiendo que se denota: $\bar{z}$ al conjugado de z, hallar las expresiones de $z + \bar{z}$ y $z.\bar{z}$.

Ejercicio 51: Calcular

a) *Re* $\left\{\dfrac{3+4i}{5-2i} + (-2+i)^2\right\}$

b) *Re* $\{(-2i)^4 - (-1 - 6i)^3\}$

c) *Im* $\left\{\dfrac{-8i}{(-4+2i)^2}\right\}$

d) *Im* $\left\{\left(\sqrt{7}i\right)^2\left(\dfrac{7-8i^3}{3}\right)\right\}$

RECTA REAL

Conjuntos e intervalos

¡Para leer y recordar!

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos, conocidos como los elementos del conjunto.

Si $\mathbb{S}$ es un conjunto, la notación $\in$(pertenece) significa que a es un elemento de $\mathbb{S}$ y $\notin$ (no pertenece) significa que b no es un elemento de $\mathbb{S}$.

Por ejemplo, si $\mathbb{Z}$ representa el conjunto de los números enteros $-3 \in \mathbb{Z}$ pero $\pi \notin \mathbb{Z}$.

Algunos conjuntos se pueden describir listando sus elementos entre llaves. Por ejemplo, el conjunto A formado por todos los enteros positivos menores que 5 se puede escribir como:

A = {1; 2; 3; 4}

También podemos escribir **A** en la forma

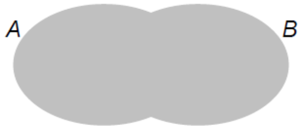
A = {x/ x es un número entero y 0 < x < 5}

Que se lee:

"A es el conjunto de todas las x tal que x es un entero y x es mayor que 0 y menor que 5".

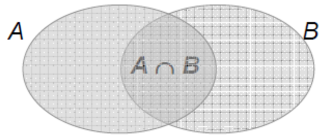
Si **A** y **B** son conjuntos, entonces

su **UNIÓN A** U **B** es el conjunto constituido por todos los elementos que están en **A** ó en **B** (o en ambos).



Si **A** y **B** son conjuntos, entonces

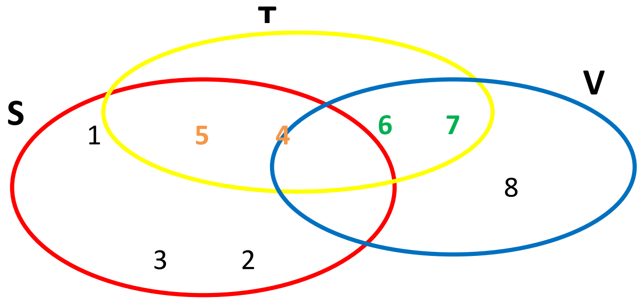
la **INTERSECCIÓN** de **A** y **B** es el conjunto **A** ∩ **B** es el conjunto formado por todos los elementos que están tanto en **A** como en **B**.



El conjunto vacío denotado ∅ es el conjunto que no contiene ningún elemento.

Ejemplo: Si S= {1; 2; 3; 4; 5} , T = {4; 5; 6; 7} y V = {6; 7; 8}; obtener: S U T, S ∩T y S ∩V

S U T = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}   S ∩ T = {4; 5}   S ∩ V = Ø

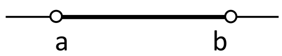


Ciertos conjuntos de números reales, conocidos como intervalos, se presentan con frecuencia en el cálculo y geométricamente corresponden a segmentos de recta.

Por ejemplo, si **a** < **b** entonces **el intervalo abierto** desde **a** hasta **b** está integrado por todos los números entre **a** y **b**, y se denota mediante el símbolo **(a; b).**

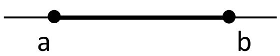
También podemos escribir: **(a; b) = {x ∈ ℝ / a < x < b}**

Observa que los puntos extremos, **a** y **b**, no están incluidos en este intervalo. Este hecho queda indicado por los paréntesis ( ) en la notación de intervalos y por los círculos en blanco en la gráfica de la figura

ó


El intervalo cerrado de **a** a **b** es el conjunto **[a; b] = {x ∈ ℝ / a ≤ x ≤ b}**

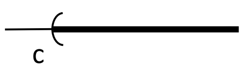
Aquí los puntos extremos del intervalo han quedado incluidos. Esto se indica mediante corchetes [ ] en la notación de intervalos y con los círculos sólidos en la figura de la gráfica del intervalo

ó


Necesitamos considerar también intervalos infinitos, como **(a; + ∞) = {x ∈ ℝ / x > a}**

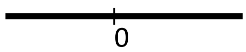
Esto no significa que el ∞ ("infinito") sea un número. La notación (**a**; + ∞) corresponde al conjunto de todos los números que son mayores que **a**, por lo que el símbolo ∞ simplemente indica que el intervalo se extiende de manera indefinida en la dirección positiva.

La siguiente tabla lista los distintos tipos posibles de intervalos. Siempre suponemos que **a < b**

en símbolos		gráficamente
[c ; + ∞) = {x ∈ ℝ / x ≥ c }	→	
(c ; + ∞) = {x ∈ ℝ / x > c }	→	
(- ∞ ; d] = {x ∈ ℝ / x ≤ d }	→	

$(-\infty\,;d) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x < d\} \rightarrow$

$(-\infty\,;+\infty) = \mathbb{R} \rightarrow$



$(a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x \leq b\} \rightarrow$

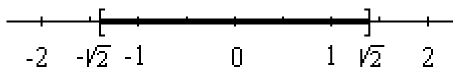
$[a\,;b) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x < b\} \rightarrow$

$(a\,;b) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x < b\} \rightarrow$

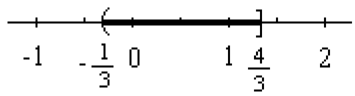
$[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x \leq b\} \rightarrow$

Ejemplos:

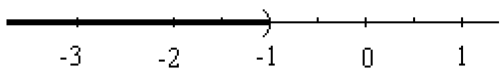
$$\left[-\sqrt{2}\;;\sqrt{2}\right] = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -\sqrt{2} < x \leq \sqrt{2}\}$$



$$\left(-\frac{1}{3}\;;\frac{4}{3}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; -\frac{1}{3} < x \leq \frac{4}{3}\right\}$$



$$(-\infty\,;-1) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x < -1\}$$



Ejercicio 1: Expresar mediante intervalos cada uno de los siguientes subconjuntos de R: el conjunto de los números reales x que satisfacen:

a) x es mayor que 2 y menor que 6.
b) x es mayor o igual que -1.
c) x es menor que $\frac{2}{3}$.
d) x supera al menor número entero positivo

Ejercicio 2: Representar sobre la recta real los siguientes intervalos:

a) $[2\,;5]$
b) $= \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; -\frac{1}{3} < x \leq \frac{4}{3}\right\}$
c) $\left(-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$
d) $\{x / x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x < 2{,}75\}$

Ejercicio 3: Expresarlos siguientes intervalos en términos de desigualdades y graficar:

a) (-3; 0)

b) [1; 5)

c) (5; +∞)

d) (-∞; 5)

Ejercicio 4: Expresar las siguientes desigualdades como intervalos y realizar las gráficas correspondientes:

a) $x \leq 2$

b) $-3 \leq x < 4$

c) $x > -1$

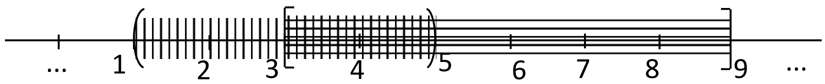
Uniones e intersecciones de intervalos

Ejemplo: Graficar los siguientes intervalos:

a) (1; 5) ∩ [3 ; 9]

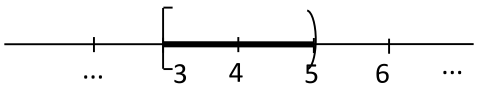
La intersección de dos intervalos está formada por los números que se encuentran en ambos .Por lo tanto

(1; 5] ∩ [3; 9] = $\{x \,/\; 1 < x < 5$ **y** $3 \leq x \leq 9\}$



= $\{x \,/\; 3 \leq x < 5\}$

= [3; 5)

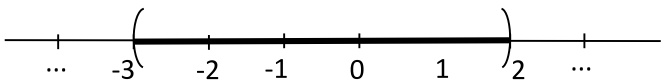


b) (-3; -1) U (-2 ; 2)

La unión de los intervalos (-3; -1) y (-2; 2) la conforman los números que se encuentran ya sea en (-3; -1) o en (-2; 2), por lo que

(-3; -1) U (-2; 2) = $\{x \,/\; -3 < x < -1$ **ó** $-2 < x < 2\}$

= (-3; 2)



Ejercicio 5: Determinar:

a) $\left[-\frac{1}{4}\,; 2\right) \cup [1; +\infty)$ b) $(-3; -1) \cup \left[\frac{5}{2}\,; 3\right)$

c) $(-3; -1) \cap \left[\frac{5}{2}\,; 3\right)$ d) $[0; \sqrt{5}\,) \cap \left[\frac{3}{2}\,;\,\frac{7}{2}\right]$

Ejercicio 6: Hallar los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones y representar los subconjuntos de R correspondientes.

a) $0 < x \leq 2 \ \wedge x \in [1 ; 3)$

b) $x > -1 \ \wedge \ x \in (2 ; 5)$

c) $x \in [-4; +\infty) \ \wedge x < -2$

d) $x \in (-2, 2) \ \wedge \ x \in [1; +\infty)$

e) $x \in (-\infty ; 3) \ \wedge x \in (-3; +\infty)$

f) $-3 \leq x < 1 \ \wedge \ x \notin [0; 2)$

Ejercicio 7: Dados los intervalos A = [-2; 1) ; B = [-1 ; + ∞) ; C = [-3 ; 2,5) determinar:

a) $(A \cap B) \cap C$

b) $(A \cap B) \cup C$

Ejercicio 8: Sean A = [-2; 6]; B = (1; 5]; C = (-1; 3). Calcular:

a) $(A \cup B) \cap C$

b) $(A \cap B) \cup C$

Ecuaciones lineales

Una **ecuación** es una igualdad que se verifica para uno, algunos o ningún valor de la/s variable/s.

Ejemplos:

a) $x+2 = 0$ b) $6-3x= 5$ c) $x+4 = x-3$ d) $x+2y+z = 0$

e) $x^2-3= 1$ f) $x^2+1=0$ g) $x^3-8=0$.

Resolver una ecuación es encontrar, si existen, el o los valores de las variables que verifican la igualdad planteada. Dichos valores determinan el conjunto solución de la ecuación.

Una ecuación de primer grado o lineal es aquella cuya forma general es: ***ax + b = 0***, siendo a y b números reales y $a \neq 0$.

Ejemplos:

a) $$-3\left(2x - \frac{5}{6}\right) = \left(-\frac{5}{4}x + 3\right) : 0{,}5$$

$$-6x + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}x + 6$$

$$-6x + \frac{5}{2}x = 6 - \frac{5}{2}$$

$$-\frac{7}{2}x = \frac{7}{2}$$

$$x = -1$$

Verificación

$$-3\left(2x - \frac{5}{6}\right) = \left(-\frac{5}{4}x + 3\right) : 0{,}5$$

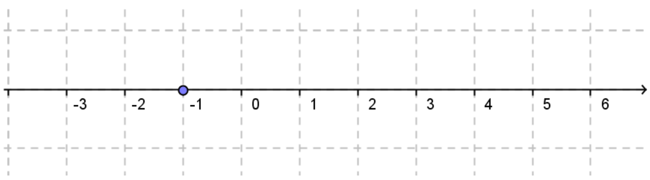
$$-3\left(2(-1) - \frac{5}{6}\right) = \left(-\frac{5}{4}(-1) + 3\right) : 0{,}5$$

$$-3\left(-2 - \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{4} + 3\right) : 0{,}5$$

$$-3\left(-\frac{17}{6}\right) = \left(\frac{17}{4}\right) : 0{,}5$$

$$\frac{17}{2} = \frac{17}{2}$$

Sol = {-1} = $\{x \in \mathbb{R} / \, x = -1\}$



b) $2x - 8 + 3(2x - 1) = x - (-2x + 1)$

$$2x - 8 + 6x - 3 = x + 2x - 1$$

$$2x + 6x - x - 2x = -1 + 3 + 8$$

$$5x = 10$$

$$x = 10 : 5$$

$$x = 2$$

$$\text{Sol} = \{2\} = \{x \in \mathbb{R} / x = 2\}$$

Verificación: $2x - 8 + 3(2x - 1) = x - (-2x + 1)$

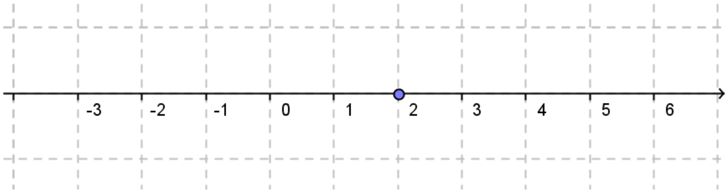
$$2.(2) - 8 + 3(2.(2) - 1) = (2) - (-2.(2) + 1)$$

$$4 - 8 + 3(4 - 1) = 2 - (-4 + 1)$$

$$4 - 8 + 9 = 2 - (-3)$$

$$5 = 2 + 3$$

$$5 = 5$$



Ejercicio 9: Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{5}{3}x + 8{,}2 = 10 - \frac{5}{6}x$

b) $2,\hat{6} + 5{,}2 = -x + \frac{7}{8}x$

c) $1,\hat{8} + 0,\hat{3}x - \frac{1}{3} = -0,\hat{7}x$

d) $2,\hat{4}.\left(-\frac{5}{11} + 3x\right) = 1,\hat{5}.\left(-\frac{3}{7}x + 1\right)$

e) $x - \left(2x + 0{,}3\hat{2}\right) - 3x = \frac{1}{9} + 9x$

f) $0,\hat{7}(x + 1) = 0,\hat{2} + 0,\hat{7}$

g) $\frac{-2x+3}{3} + \frac{x}{6} = 2x$

h) $\frac{5}{2}x + 0,\hat{3} = \frac{3x+1}{2} + \frac{0,\hat{2}x}{4}$

i) $\frac{7-8x}{6} + \frac{2x-2}{3} = \frac{-10x+1}{3}$

j) $2,\hat{1}x + \frac{1}{4}x - 3\left(\frac{1}{9}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36}x$

Valor absoluto o módulo de un número real

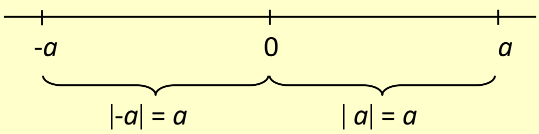
¡Para leer y recordar!

Definición

-El **valor absoluto** de un número ***a***, es la distancia de ***a*** hasta 0 en la recta de los números reales. La distancia es siempre positiva ó 0, por lo que tenemos $|a|$ **≥ 0 para todo número *a*.**

Dado un número ***a***$\in$ R, llamaremos **módulo ó valor absoluto** de ***a***, al mismo número ***a*** si este es positivo o cero, y ***-a*** si ***a*** es negativo, es decir:

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$



Ejemplos:

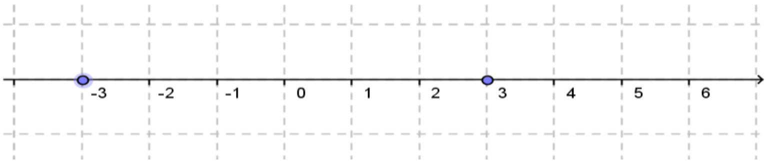
a) $|3| = 3$ b) $|-3| = -(-3) = 3$ c) $|0| = 0$

Ejemplos: Encontrar los valores de x que satisfacen la siguiente igualdad:

a) $|x| = 3$

$x = 3$ ó $x = -3$

Sol = {-3; 3}



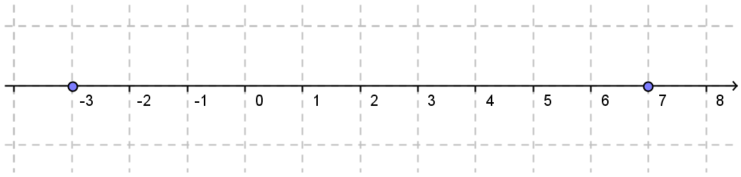
b) $|x - 2| = 5$

$x - 2 = 5$ ó $x - 2 = -5$

$x = 5 + 2$ $x = -5 + 2$

$x = 7$ $x = -3$

Sol = {-3; 7}



c) $|2x - 4| = 0$

$2x - 4 = 0$

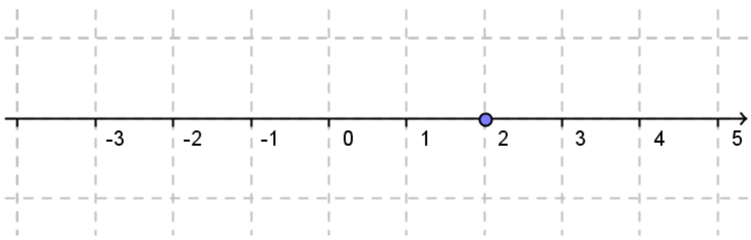
$2x = 0 + 4$

$2x = 4$

$x = 4 : 2$

$x = 2$

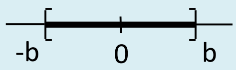
Sol = {2}



Observa que como $|x|$ mide la distancia de x al 0, que $|x|$ sea menor ó igual que b significa que la distancia de x a cero no debe ser mayor que b *es decir:*

Si $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ entonces la desigualdad $|x| \leq b$ es equivalente a la doble desigualdad $-b \leq x \leq b$.

Gráficamente



En general, $-b \leq x \leq b$ *es equivalente* $x \geq -b$ y $x \leq b$ *y representa la intersección*

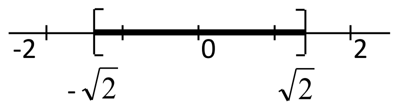
$$[-b ; +\infty) \cap (-\infty ; b] = [-b; b]$$

Ejemplo:

$|x| \leq \sqrt{2}$ es equivalente a $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Por lo tanto, $|x| \leq \sqrt{2}$ significa que $x \in \left[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\right]$

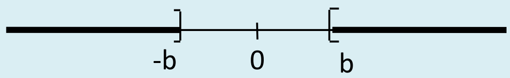
Si representamos en la recta numérica obtenemos e intervalo:



Observa que como $|x|$ mide la distancia de x al 0, que $|x|$ sea mayor ó igual que b significa que la distancia de x a cero debe ser mayor que b *es decir:*

Si $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ entonces la desigualdad $|x| \geq b$ es equivalente a decir que $x \geq b$ ó $x \leq -b$.

Gráficamente



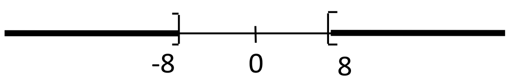
En general, $|x| \geq b$ *es equivalente a* $x \geq b$ ó $x \leq -b$ *y representa la unión* $(-\infty ; -b] \cup [b ; +\infty)$

Ejemplo:

$|x| > 8$ es equivalente a $x \geq 8$ ó $x \leq -8$

Por lo tanto, $|x| < 8$ significa que $x \in (-\infty ; -8] \cup [8; +\infty)$

Si representamos en la recta numérica obtenemos:



Ejercicio 10: Resolver y representar gráficamente. Expresar la solución, de ser posible, en forma de intervalos

a) $|x| = 3$

b) $|x - 6| = 3$

c) $|2x + 7| = 5$

d) $|x| \geq 3$

e) $|x| \leq 5$

Inecuaciones lineales

Las ecuaciones se caracterizan por presentar el signo de igualdad, mientras que en las desigualdades aparecen precisamente algunos de los signos $<$, $\leq$, $>$ ó $\geq$. De todas formas, tanto las ecuaciones como las inecuaciones pueden ser de primer grado. Una inecuación es de primer grado cuando las incógnitas que aparecen en su expresión tienen exponente igual a 1.

Resolver una inecuación significa determinar todos los valores de la variable que hacen verdadera la desigualdad.

Ejemplos: Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones lineales:

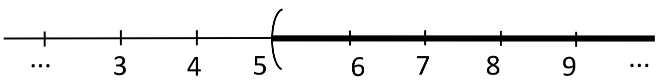
a) $4x - 8 > 12$

$4x > 12 + 8$

$4x > 20$

$x > 5$ $\qquad$ $S = (5; +\infty)$

Gráficamente

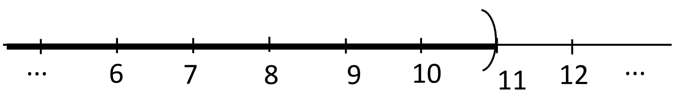


b) $\dfrac{x+1}{2} < 6$

$x + 1 < 12$

$x < 11$ $\qquad$ $S = (-\infty; 11)$

Gráficamente



c) $-2x + 6 < x - 3$

$-2x - x < -3 - 6$

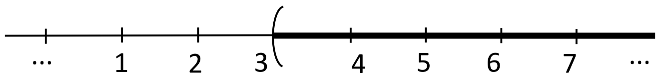
$-3x < -9$

$x > (-9) : (-3)$

$x > 3$ $\qquad$ $S = (3; +\infty)$

> **Recordar!**
>
> Si multiplicamos cada lado de la desigualdad por un número negativo, entonces invertimos el sentido de la desigualdad

Gráficamente:



Ejercicio 11: Resolver las siguientes inecuaciones y representar el conjunto solución en la recta real:

a) $2x - 3 < 4 - 2x$

b) $7 + 3x < 4 + x$

c) $2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) > 3x$

d) $\frac{x+2}{4} \leq \frac{x-1}{3}$

e) $3x - 12 \leq \frac{5x - 6}{4}$

f) $3.(4 - x) < 12x + 6$

g) $\left(2 - \frac{1}{3}x\right)(-3) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right) > 0$

Ejercicio 12: Resolver y representar gráficamente. Expresar la solución, de ser posible, en forma de intervalos

a) $|x - 1| < 4$

b) $|x + 4| > 3$

c) $|x - 4| \geq 1$

d) $|x + 2| \leq 2{,}5$

e) $|-2x + 7| < 5$

f) $|-x + 1| \geq 1{,}8$

CONCEPTO DE FUNCIÓN

Este Módulo, si bien hace referencia, como eje central a las relaciones entre dos variables, que son funciones, tiene como objetivo general utilizar las funciones como un eje transversal a los demás contenidos matemáticos: es mostrar a través de ellas que la Matemática no es solamente una materia importante en su plan de estudios, sino también una herramienta que le permitirá analizar y comprender mejor muchas situaciones que se presentan en su vida cotidiana, en su trabajo, en la lectura de un diario o de una publicidad, por ejemplo para leer una factura de servicios de electricidad o gas, en el estudio de otras materias, fundamentalmente Física y Química. Por esta razón proponemos muchos y variados ejemplos prácticos.

Nuestros objetivos son:

- ✓ *Construir modelos matemáticos (Aplicar conceptos matemáticos en la resolución de situaciones de la vida cotidiana o de otras ciencias).*
- ✓ *Utilizar diferentes registros de un mismo concepto, y los cambios entre registros (Expresar las funciones a través de diferentes lenguajes: tablas, fórmulas, enunciados comunes, gráficos, y traducir dichas expresiones entre sí).*
- ✓ *Analizar información y anticipar resultados (Obtener información de la lectura de esas diferentes formas de representación de las funciones).*
- ✓ *Ejercitar y ampliar los conocimientos adquiridos en la escuela secundaria relacionando las funciones con las operaciones numéricas, las ecuaciones, y la Geometría.*

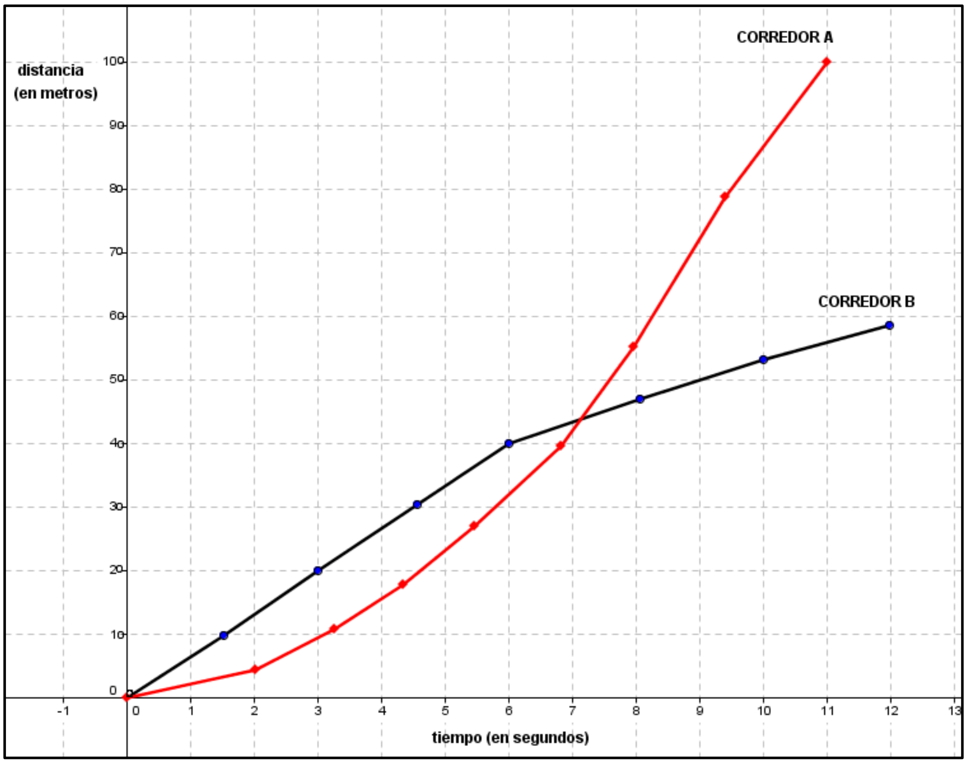
Antes de comenzar con el desarrollo teórico del tema, le presentamos 2 situaciones.
Sugerimos que se reúna en un grupo pequeño (o con su compañero de banco) y que antes de comenzar a intercambiar ideas, **lea con detenimiento** cada problema y tome unos minutos para **pensar individualmente** su resolución. Luego expongan dentro del grupo lo que analizaron y evalúen cual es el procedimiento más eficaz en cada caso.

Situación 1
Teclas alfanuméricas: 0800-INGRESO

Sabemos que los teléfonos tienen asignados a sus teclas letras y números, por lo que a muchas empresas que contratan al servicio del 0800 les asignan números fáciles de memorizar para sus clientes. Así por ejemplo, una escuela podría tener el 0800-3728352 que se corresponde con el 0800-ESCUELA.

a) ¿Qué número habrá que marcar para comunicarse con el 0800-HELADOS?
b) ¿A qué palabra corresponderá el número 0800464776? ¿es única?
c) Y al número 0800-520461, ¿qué palabra le corresponde?

Situación 2
100 metros llanos
El siguiente gráfico describe el desarrollo de dos atletas durante una carrera de 100 metros llanos



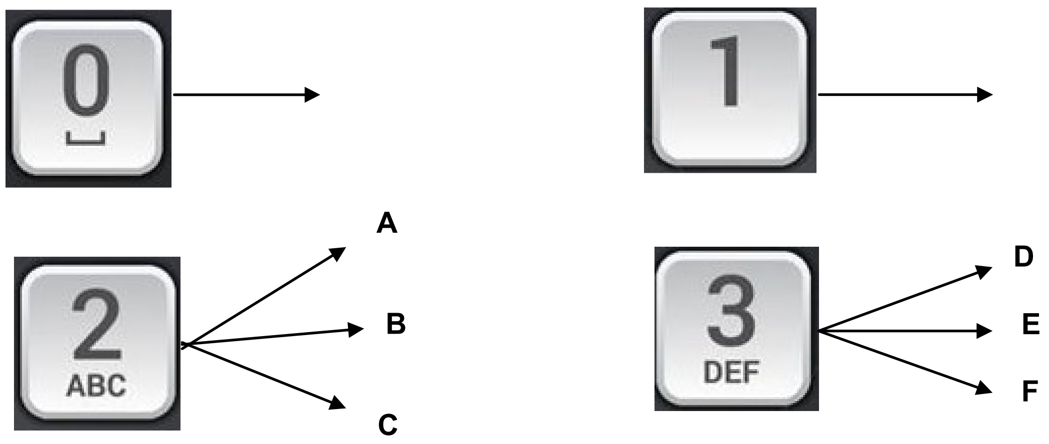
Analizar el gráfico y responder:
a) ¿Qué magnitudes se relacionan?
b) ¿Durante cuánto tiempo estuvo primero el corredor B?
c) ¿Cuántos metros recorrió el corredor A a los tres segundos de haber largado? ¿y el corredor B?
d) ¿En qué momento el corredor B es alcanzado por el corredor A?
e) ¿Cuál de los dos corredores terminó la carrera? ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a la meta?

A continuación, presentamos un análisis de las situaciones presentadas anteriormente:
En las situaciones se observa que se vinculan distintas variables (o magnitudes): la primera situación relaciona letras con números de la misma tecla y el gráfico relaciona la distancia recorrida en metros por los atletas durante cierto tiempo medido en segundos.

Además, podemos notar que los valores de una variable ***varían*** al cambiar los valores de otra.

Esto se debe a que las variables que describen estas situaciones aparecen RELACIONADAS entre sí.

Observemos que en el segundo problema pudimos responder todas las preguntas por que a cada valor de una de las variables *tiempo* le corresponde un único valor de la variable *distancia*. En cambio, en la primera situación esto sucede solo con la relación que le asigna a cada letra el número que está en la misma tecla, ya que no ocurre lo mismo con la correspondencia que a cada número le asigna una letra de la misma tecla por haber varias posibilidades. Además, al 1 y 0 no se le asigna ninguna letra. Para entender mejor lo antes dicho observemos el siguiente diagrama:



A lo largo de este módulo nos interesa estudiar y analizar solo aquellas relaciones que se ajusten a los dos últimos problemas. Ahora bien, cuando mencionamos relación entre variables ¿a qué nos referimos exactamente (o formalmente)?

Una relación es una correspondencia que asocia elementos de un conjunto, llamado **conjunto de partida**, con elementos del segundo conjunto, llamado **conjunto de llegada**.

Se pueden definir, asociados a la relación, dos conjuntos: el dominio y la imagen de la misma, que serán subconjuntos del conjunto de partida y de llegada respectivamente.

El dominio de una relación es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de partida que están relacionados con, al menos, un elemento del conjunto de llegada.

La imagen de una relación es el conjunto formado por los elementos del conjunto de llegada que están relacionados con algún elemento del dominio de la relación.

Las relaciones que cumplen:

1) El dominio de la relación es igual al conjunto de partida
2) Cada elemento del dominio está relacionado con un **UNICO** elemento del conjunto de llegada, llamado su imagen.

reciben el nombre especial de FUNCIÓN

Una función de A en B es una relación que asocia a CADA ELEMENTO ***x*** del conjunto A **UNO Y SOLO UN** elemento ***y*** del conjunto B, llamado su imagen.

Una función modeliza una situación en la que existe una relación de dependencia entre dos variables que intervienen en dicha situación.

Dado que el valor de la variable $\boldsymbol{y}$ en $y = f(x)$ siempre depende de la elección de $\boldsymbol{x}$, decimos que $\boldsymbol{y}$ es la **variable dependiente**. Por el contrario, como la elección de $\boldsymbol{x}$ es independiente de $\boldsymbol{y}$, la llamamos **variable independiente**.

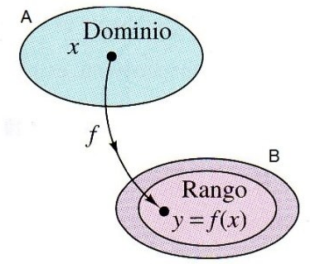
Existen muchos fenómenos y situaciones de nuestro entorno donde se observa que una cantidad ***depende*** de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de la edad, el área de un círculo depende del radio del mismo, la temperatura de ebullición del agua depende de la altura del lugar, la distancia recorrida por un objeto al caer libremente depende del tiempo que transcurre en cada instante. En cada caso decimos que la segunda cantidad es dependiente de la primera.

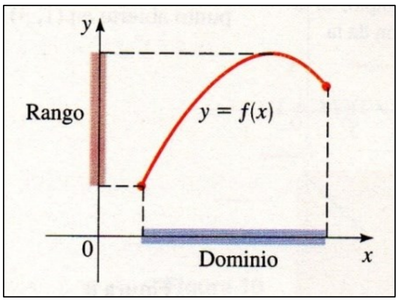
Formalicemos lo antes analizado a través de las siguientes definiciones:

- ❖ <u>DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL</u>

Sean A y B conjuntos de números reales. Una función real f de una variable real x entre A y B, es una relación que hace corresponder **<u>a cada</u>** número ***x*** perteneciente al conjunto A, **<u>un único</u>** número ***y*** del conjunto B, llamado imagen de x por f, que se denota $y = f\ (x)$.

En símbolos, se expresa $f\ :\ A\ \rightarrow\ B$, siendo el conjunto A el Dominio de f, y el conjunto B el codominio o rango de f.





Nociones básicas y notaciones
Sea $f\ :\ A\ \rightarrow\ B$ una función,

- ✓ La notación $y\ =\ f\ (x)$ señala que *y* es una función de ***x,*** y se lee: "y es igual a f de x". La variable $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ es la ***variable independiente***, y el valor $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$ se llama ***variable dependiente***, y ***f*** es el nombre de la función.
- ✓ Gottfried Leibniz fue el primero que utilizó la palabra función, en 1694, para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva. Cuarenta años más tarde, Leonard Euler (1707-1783) dio una definición precisa de función e introdujo en 1734 el símbolo $f(x)$ para designar la imagen de ***x*** por una función ***f***.

A partir de este momento solo analizaremos y trabajaremos con relaciones funcionales, es decir con relaciones que verifiquen la definición anterior. Antes de presentar otros ejemplos de funciones, consideremos las siguientes definiciones:

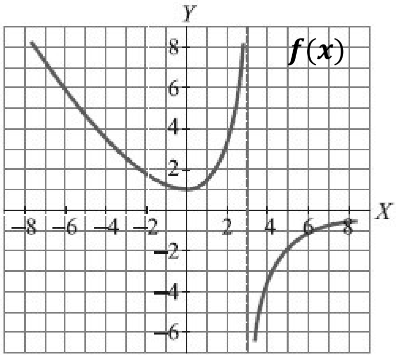
- ❖ <u>DOMINIO DE UNA FUNCIÓN</u>

El dominio de una función f es el conjunto de números reales que puede tomar la variable independiente x. Lo denotamos ***Dom f.***

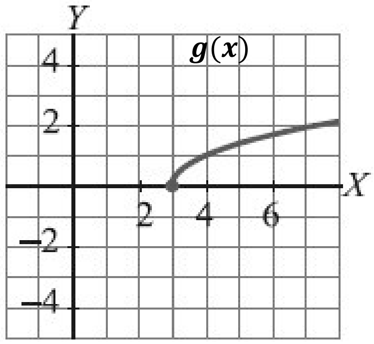
Ejemplo 1

Observar los siguientes gráficos de funciones. Escribir el dominio de cada función representada.

a)



b)



Respuesta:

a) $Dom\, f = \mathbb{R} - \{3\}$ *ó* $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ b) $Dom\, g = [3;\ +\infty)$

Si una función viene determinada por una fórmula, para obtener el **máximo dominio** de la función debemos tener en cuenta, las mínimas restricciones que presentan las operaciones algebraicas con números reales:

- En toda división de números reales, el divisor es ***distinto de cero***.
- El radicando de raíces de índice par debe ser debe ser ***mayor o igual que 0***.
- El argumento de un todo logaritmo debe ser ***mayor que cero.***

Ejemplo 2

Determinar el **máximo dominio** de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x - \frac{1}{3}$

b) $g(x) = \sqrt{7 - 0{,}5x}$

c) $y = \frac{x+1}{x^2-9}$

Respuesta

a) Esta función es una función polinómica de grado uno, es decir, es una función lineal. Por las operaciones que intervienen en este tipo de funciones (suma, resta, potencia de exponente natural y multiplicación) podemos asegurar que x puede tomar cualquier número real, es decir que $f(x)$ está definida para cualquier valor real. Concluimos entonces que su máximo dominio es: $Dom\, f = \mathbb{R}$

b) En la definición de la función $g(x)$ interviene una raíz cuadrada y por lo dicho antes el radicando debe ser **mayor o igual a cero**, es decir, planteamos la siguiente inecuación para determinar el dominio:

$$7 - 0{,}5x \geq 0$$

$$-0{,}5x \geq -7$$

$$x \leq (-7) : (-0{,}5)$$

$$x \leq 14$$

RECORDAR!

Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por ***un número negativo*** la desigualdad **cambia de sentido.**

Concluimos que el máximo dominio de la función $g(x)$ es: $Dom\, g = (-\infty;\ 14]$

c) Como el cociente entre dos números reales es siempre otro número real salvo que el divisor sea cero, realizamos la siguiente restricción al denominador de la expresión:

$$x^2 - 9 \neq 0$$

$$x^2 \neq 9$$

$$|x| \neq 3$$

$$x \neq 3 \;\; y \;\; x \neq -3$$

Concluimos que el máximo dominio de la función es: $Dom\ g = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$ $\quad ó$

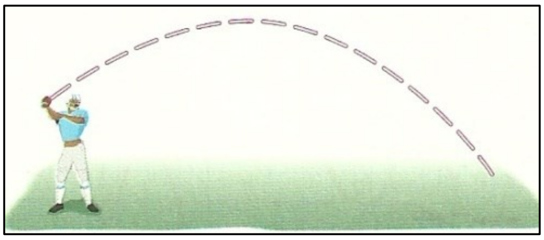
$(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$

En el contexto de un problema el máximo dominio de la función determinado por su fórmula, queda restringido a las condiciones de dicho problema.

Ejemplo 3

Si consideramos la expresión de la siguiente función polinómica de 2^{do} grado, $\boldsymbol{h(x) = -0,05x^2 + 1,05x + 5}$ descontextualizada, es correcto decir que está definida para cualquier número real, es decir, que su dominio es $\mathbb{R}$.

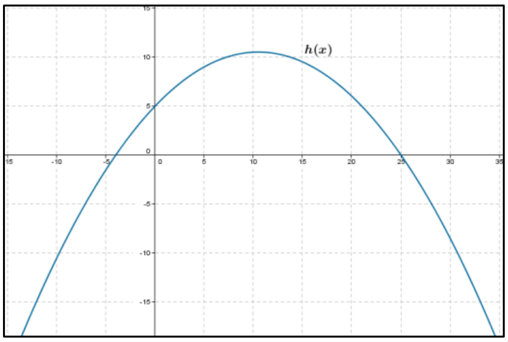
Pero si suponemos que un jugador de béisbol lanza una bola en un campo de juego y la trayectoria de la bola está dada por la ecuación $\boldsymbol{h(x) = -0,05x^2 + 1,05x + 5}$, donde x es la distancia que la bola ha viajado horizontalmente y h es la altura sobre el nivel del suelo, ambas medidas en pies. ¿Cuál es el dominio de esta función? es decir ¿para qué valores de x tiene sentido el problema?



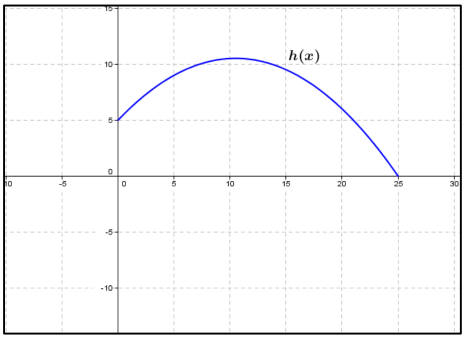
Respuesta

Teniendo en cuenta que la distancia es positiva y que la trayectoria de la bola va a estar dada por la ecuación de $h(x)$ mientras ésta se mantenga en el aire, concluimos que los valores de x para los cuales el problema tiene sentido son los que se encuentran entre 0 y su raíz positiva, es decir: $[0; 25\,]$.

Para comprender completamente lo antes dicho, mostraremos la representación gráfica de la función $h(x)$ teniendo en cuenta los distintos dominios.



$Dom\ h = \mathbb{R}$



$Dom\ h = [0; 25]$

❖ RANGO O IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

La imagen de una función f es el conjunto de números reales formados por los valores que toma la variable dependiente ***y***. Lo denotamos ***Im f.***

Ejemplo 4

A partir de los gráficos de funciones dados en el ejemplo 1, determinar el conjunto imagen de cada una.

Respuesta

a) $Im\ f = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$
b) $Im\ g = [0; +\infty)$

Considere las siguientes situaciones problemáticas en las que aparecen distintos ejemplos de funciones y aplique lo antes definido:

Situación problemática 1: **Temperaturas media anual**

Se tomaron notas de las temperaturas en la ciudad de Comodoro Rivadavia desde el año 2008 hasta el 2014. Las temperaturas medias obtenidas se visualizan en la siguiente tabla

Año	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
Temperatura media en ºC	13,6	13,5	13,2	13,6	13,3	13,5	13,4

Fuente: Centro meteorológico nacional

a) ¿Qué variables intervienen?
b) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Y la variable independiente?
c) ¿Cuál es el dominio de esta función?
d) Indicar el conjunto imagen.
e) ¿Cuál es la temperatura media obtenida en 2011? ¿en algún otro año se registró la misma temperatura media? En caso afirmativo, indicar el/ los años.

*La **escala centígrada** (símbolo °C) o también conocida como **escala de Celsius** es la unidad creada en el año 1742 por el físico y astrónomo sueco Andrés Celsius para medir la temperatura. Celsius propuso que la temperatura 0 °C coincidiera con el punto de congelación del agua mientras que la temperatura de 100°C equivaliera a la temperatura de ebullición del agua a nivel del mar.*

La escala de Celsius es muy utilizada para expresar las temperaturas de uso cotidiano, desde la temperatura del aire a la de dispositivos domésticos (hornos, refrigeradores, etc.). También se emplea en trabajos científicos y tecnológicos, aunque en muchos casos resulta obligado el uso de la escala de Kelvin, la cual es equivalente a la Celsius. Dependiendo de la parte del mundo en donde vivamos, utilizamos sistemas de medición diferente. Los que hablamos castellano generalmente utilizamos el sistema métrico, y medimos la temperatura en grados Celsius. Pero no siempre es así, en algunos países de América Central y el Caribe (de habla hispana), puede que se utilice el sistema inglés, o combinaciones de ambos sistemas. Hay países en donde las distancias se miden en metros, pero para pesar utilizan libras y onzas. Lo mismo sucede con la temperatura.

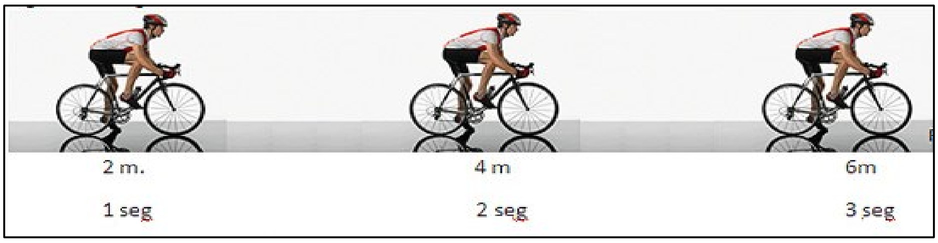
Situación problemática 2. **Velocidad a la que circula un objeto**

Cuando se desea averiguar la rapidez con la que se mueve un objeto se calcula la velocidad. La velocidad es la relación que se establece entre el espacio o la distancia que recorre un objeto y el tiempo que invierte en ello. La fórmula que permite obtener la velocidad media de ese objeto es el cociente:

$$\boldsymbol{Velocidad\ media} = \frac{\boldsymbol{espacio\ recorrido}}{\boldsymbol{tiempo\ transcurrido}}$$

En símbolos es: $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{t}}$, donde $\boldsymbol{e}$ es el espacio recorrido y $\boldsymbol{t}$ el tiempo empleado en recorrerlo. La unidad de la velocidad, en el Sistema Internacional de Unidades, es el metro por segundo $\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$, pero en lo cotidiano se utiliza $\frac{\boldsymbol{km}}{\boldsymbol{h}}$.

Observe la siguiente imagen:



En la imagen vemos que el ciclista recorrió 2 metros en 1 segundo; 4 metros en 2 segundos y finalmente 6 metros en 3 segundos. Para determinar la *velocidad media* del ciclista dividimos el espacio recorrido por el tiempo transcurrido. Luego la velocidad del ciclista es $2\ \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$**.**

(Ésta situación se supone en condiciones óptimas es decir que no aceleró, no frenó y no se detuvo en ningún momento del trayecto)Supongamos que un automóvil se desplaza a velocidad constante, $v = 40\ km/h$. Con esta información podríamos determinar el espacio recorrido en distintos intervalos de tiempo utilizando la fórmula $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}$ ¿podrías explicar cómo se obtuvo esta fórmula?

Los riesgos de accidentes aumentan con el incremento de la velocidad porque a mayor velocidad se reduce la capacidad de reacción y aumenten, por el contrario, las exigencias. Cuanto mayor sea la velocidad, mayor será la distancia de frenado, mayor la distancia de seguridad, mayor la separación que se debe mantener entre vehículos, etcétera. En la ***distancia de detención*** *o* ***de seguridad*** *intervienen dos factores: el tiempo de reacción (T.R.) y la distancia de frenado (D.F.). El* ***tiempo de reacción*** *es el que transcurre desde que el conductor se da cuenta de que debe frenar hasta el momento en que aplica el freno. En un conductor normal, este tiempo es de alrededor de 1 segundo, pero aumenta considerablemente por efecto de la fatiga, o por el consumo de alcohol o drogas. La* ***distancia de frenado*** *es el espacio que recorre un vehículo desde que empieza a actuar el sistema de frenado hasta que se detiene por completo. Depende de factores como la velocidad del vehículo, la calidad y el tipo de pavimento, el estado de los frenos, el de los neumáticos y el de la suspensión, así como las condiciones meteorológicas y de la experiencia del conductor.*

En cuanto a la distancia de separación entre vehículos que circulan uno detrás del otro, se considera que la aplicación de la regla de los "dos segundos" es garantía suficiente. Es decir, pasar por un punto de una autopista 2 segundos después que el vehículo precedente, en condiciones normales del estado del pavimento y del vehículo, basta para detenerlo sin colisionar

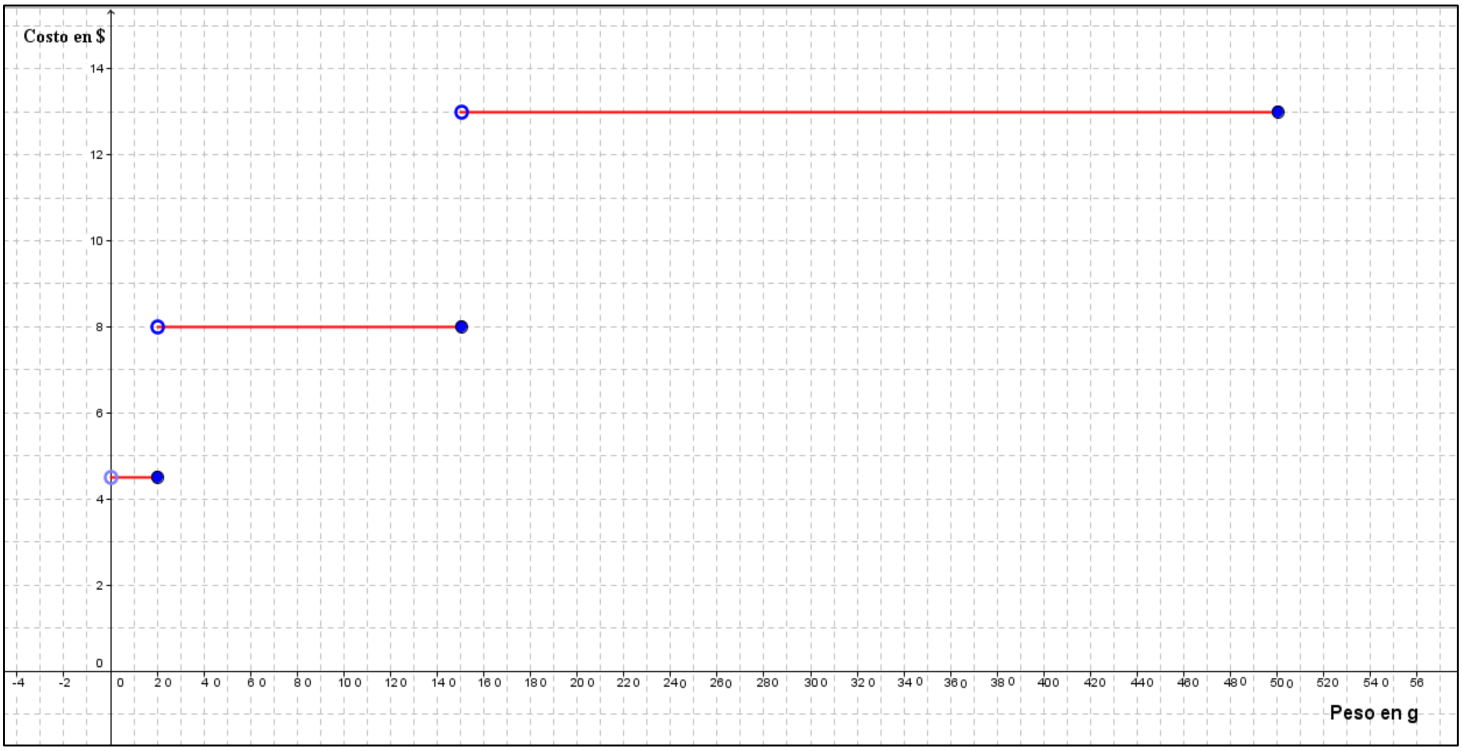
Situación problemática 3

Con una chapa cuadrada de 60 cm de lado hay que armar cajas (sin tapas) y, para ello, se recortará en cada esquina un cuadradito de lado ***x.***

a) ¿Qué variables se relacionan?
b) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Y la variable independiente?
c) Expresar el volumen V de la caja como función de x.

Situación problemática 4: **La tarifa del correo argentino**

La tarifa que se paga para enviar una carta simple dentro de la Argentina varía de acuerdo al peso de la misma. La gráfica siguiente nos informa los precios según el peso de la carta.



FUENTE: Correo Argentino-2015

Observe el gráfico y responda:

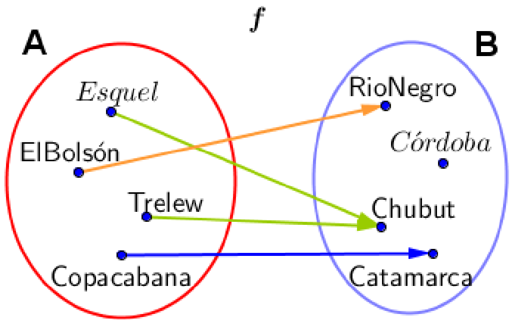
a) ¿Qué variables se relacionan?
b) Indique cuál es la variable independiente y la variable dependiente
c) ¿Cuál es el conjunto Dominio? ¿Y el Conjunto Imagen?
d) Determine el costo de envío de una carta cuyo peso es de 60 gramos.
e) Si el envío de una carta cuesta $13, ¿Cuál es el peso la carta?

Situación problemática 5

Se denomina diagrama sagital al que se construye para representar relaciones entre dos conjuntos (línea curva cerrada que contiene sus elementos y que se conocen con el nombre de diagramas de Venn). Los elementos que se relacionan se unen a través de una flecha.

En el siguiente diagrama sagital se representa la siguiente relación:

R(x, y) = "x es una ciudad de y".



a) ¿Qué variables se relacionan?
b) Indique cuál es la variable independiente y la variable dependiente
c) ¿Cuál es el conjunto Dominio? ¿Y el Conjunto Imagen?

❖ DISTINTAS FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Como vimos en las distintas situaciones, una función se puede expresar y representar a través de cuatro formas distintas:

✓ **Usando una tabla de valores**

Cuando se representa una función mediante una tabla, se puede observar en la primera columna los elementos del dominio (valores que toma la variable independiente) y en la segunda columna, los elementos de la imagen (valores que toma la variable dependiente). En esta forma de representación, la correspondencia de cada elemento con su imagen se observa en cada fila de la tabla.

A partir de la tabla presentada en la situación problemática 1, podemos obtener la siguiente información:

- la definición de la función coloquialmente, "la función asigna a cada año entre 2008 y 2014, la temperatura media medida en grados centígrados en la ciudad de Comodoro Rivadavia.
- Variable independiente x: tiempo en años
- Variable dependiente y: temperatura media anual en Comodoro Rivadavia.
- Conjunto Dominio de la función: {2008,2009,2010,2011,2012, 2013,2014}
- Conjunto Imagen de la función: {13,6 ; 13,5; 13,2;13,3 ; 13,5; 13,4}
- La imagen del número 2013 es 13,5; es decir f (2013) = 13,5
- En el año 2008 se registró la misma temperatura media anual que en el año 2011.
- En el año 2010 se registró la menor temperatura media anual.

Las tablas presentan la información en poco espacio y con comodidad de lectura, pudiendo observarse rápidamente la imagen de cada elemento; pero no son adecuadas para observar tendencias si hay muchos elementos en el dominio.

- ✓ **Gráficamente.**

Podemos representar una función en un sistema de coordenadas cartesianas, en el eje horizontal o ***eje x*** (eje de las abscisas), se representa la variable independiente, y en el eje vertical o ***eje y*** (eje de ordenadas) la variable dependiente.

De esta manera, cada elemento del dominio y su correspondiente imagen se pueden expresar mediante un punto de coordenadas $(x;\ f(x))$ en el plano.

El gráfico de una función f está formado por **todos** los pares ordenados $\left(x; f(x)\right) = (x; y)$.

Si un punto $(x;\ y)$ pertenece a la gráfica de la función entonces se dice que ***y*** es la imagen de ***x*** y que ***x*** es la pre imagen de ***y***.

Es fácil hallar imágenes y pre imágenes viendo la gráfica de la relación funcional. La primera variable ***x*** que pertenece al dominio se visualiza en el eje de las abscisas y su respectiva imagen se visualiza en el eje ***y***.

En la situación problemática 4 presentada al comienzo del módulo podemos definir la función coloquialmente, "la función asigna a cada peso de una carta el costo para ser enviada dentro del a Argentina"

- Las variables que se relacionan por esta función son:
  variable independiente ***x***: peso en gramos
  variable dependiente ***y***: tarifa en pesos

- El conjunto Dominio de la función es: $Dom\ f = (0; 500]$

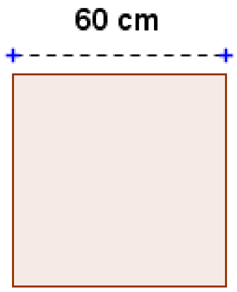
- El conjunto Imagen de la función es: $Imf = \{4{,}50; 8; 13\}$
- La imagen de $x = 60$ es $y = 8$, es decir que el costo de enviar una carta cuyo peso es de 60 gramos es de $ 8. En símbolos: $f(60) = 8$
- La pre imagen de $y = 13$ es $x = 160$ pero también lo son $x = 230, x = 420, x = 500$. Es decir que las preimagenes de $y = 13$ corresponden a los valores del intervalo $(150; 500]$.
  Pagarán $13 todas las cartas cuyo peso varíe entre 150 y 500 gramos.

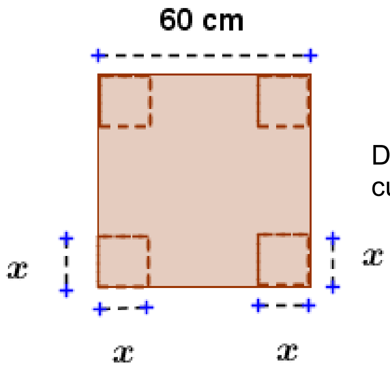
Observación:
Recordamos que, por tratarse de una función, cada valor de ***x*** sólo puede tener una imagen, aunque puede ser pre imagen de más de un valor de ***y***.

Coloquialmente: a través de una descripción con palabras. En la situación problemática 3 las variables que se relacionan son la longitud del cuadradito de lado ***x*** y el volumen de la caja que queda armada.

Para entender mejor el problema observemos la siguiente secuencia de dibujos donde se visualiza el armado de la caja a partir de la chapa cuadrada.

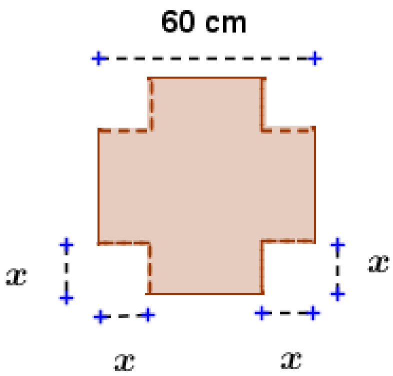
Dibujemos un cuadrado que represente la chapa de 60 cm de lado.

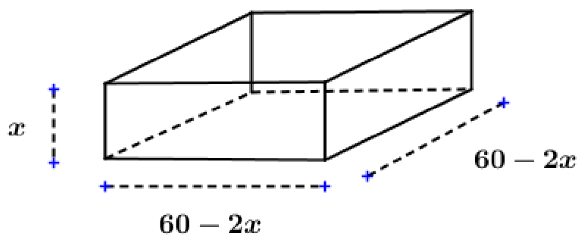




Dibujamos en cada esquina de la chapa un cuadradito de lado x.

Recortamos los 4 cuadraditos antes dibujados.





Plegamos la chapa y queda armada la caja.

Las dimensiones de la caja son: $x\ cm$ de alto; $60 - 2x\ cm$ de ancho y $60 - 2x\ cm$ de largo (o profundidad).

Por lo tanto el volumen de la caja en función del cuadradito de lado x es:

$$V(x) = x\,.(60 - 2x\,).(60 - 2x\,)$$

- ✓ **Diagrama Sagital:**

En ésta forma de representación, la función se visualiza mediante dos diagramas de Venn, en el que se pueden observar los conjuntos Dominio e Imagen y la correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos.

A partir del diagrama sagital de la situación problemática 5 que representa la relación funcional

$R(x;\ y)\ =$ "***x*** es una ciudad de ***y***", podemos obtener:

- Dom f = {El Bolsón; Trelew; Copacabana; Esquel}
- Img f = {Rio Negro, Chubut; Catamarca}
- Las variables que se relacionan son:
  variable independiente ***x***: ciudades argentinas
  variable dependiente ***y***: provincias argentinas

Ventajas: el diagrama permite observar rápidamente la imagen de cada elemento. Desventajas: no es adecuado para representar funciones cuando el dominio o la imagen de la misma son conjuntos con muchos o infinitos elementos.

✓ **Algebraicamente:** por medio de una fórmula explicita que relacione la variable dependiente e independiente

Retomando la situación problemática 2 podemos decir que la función que permite obtener el espacio recorrido en distintos intervalos de tiempo suponiendo que un vehículo se desplaza a velocidad constante de $v\ =\ 40\ km/h.$, es $\boldsymbol{e(t) = 40 \cdot t}$

Las variables relacionadas son: espacio recorrido y tiempo transcurrido

El espacio recorrido ***depende*** del tiempo transcurrido y a cada valor de la variable tiempo le corresponde un único valor de la variable espacio.

Conocer la fórmula de la función nos permite:

✓ Encontrar fácilmente la imagen de cualquier elemento, por ejemplo, si deseamos calcular el espacio que el vehículo recorrió en dos horas, hacemos:

$e(2) = \ 40.2\ km$, esto es
$e(2) = 80\ km$, decimos que 80 km es la *imagen* de 2 $horas$.

Para hallar la imagen de cualquier valor del dominio simplemente hay que sustituir la variable independiente por el valor dado y realizar la operación.

✓ Indicar de quien es imagen cualquier elemento,(es decir hallar la pre imagen) por ejemplo si deseamos averiguar cuánto tiempo tardó el vehículo en recorrer $300\ km$ hacemos:

$e\ (t) = 300\ km$
$40. t = 300\ km$, despejando t tenemos que
$t\ = 7.5\ horas$, decimos que 7.5 horas es la pre imagen de 300 km

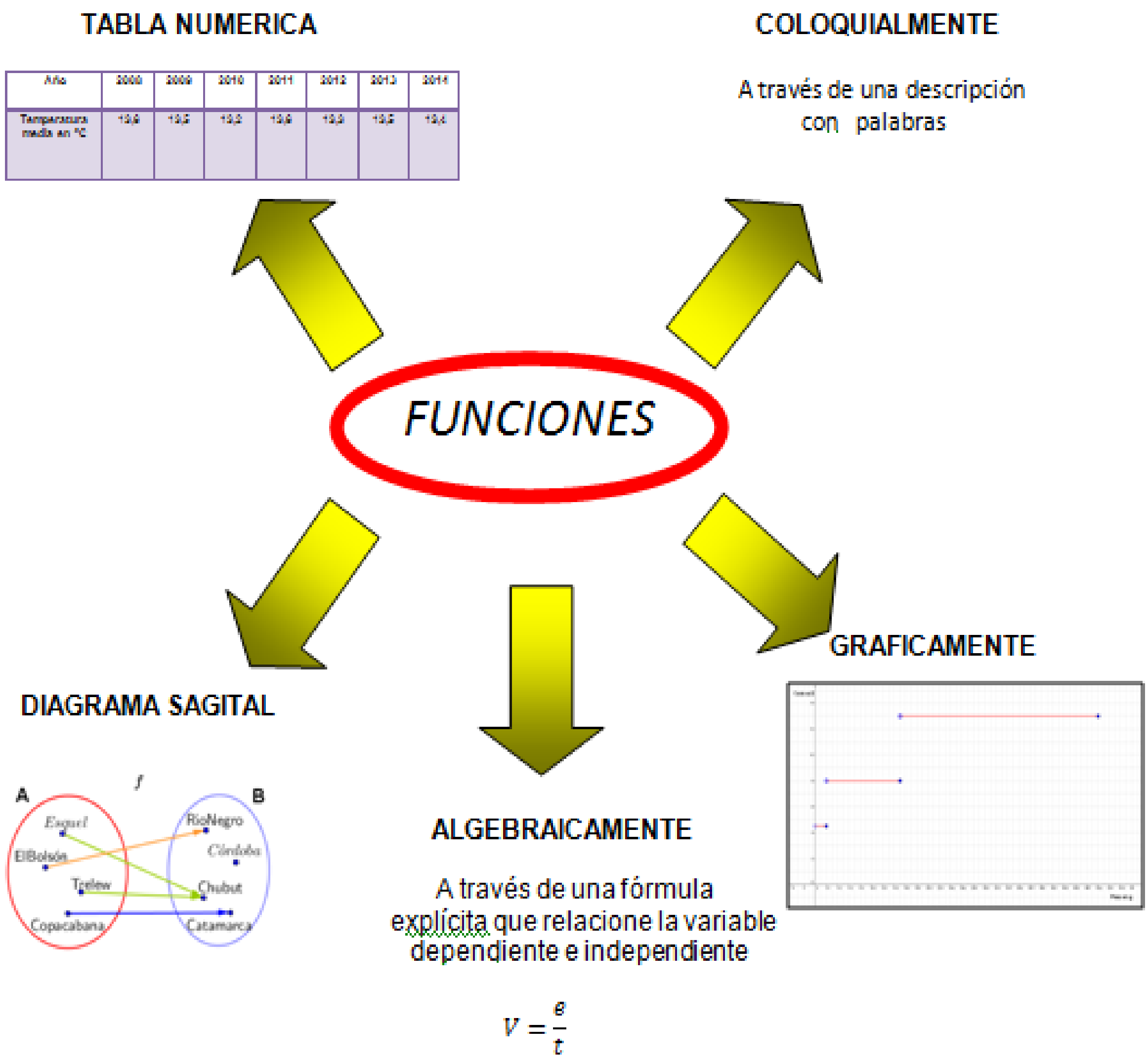
Analicemos otro ejemplo. La función definida por la fórmula: $g(x) = \frac{1}{x}$

• Para cada valor real de la variable independiente x, excepto para $x = 0$ (<u>recordar</u>: **no se puede dividir por cero!**) asigna como imagen su inverso;
• El dominio de la función es $Dom\ g = \boldsymbol{R} - \{0\}$
• La imagen de $x = 2\ es\ \ g(2) = \frac{1}{2}$, también $g(10) = \frac{1}{10}$ o por ejemplo $g(-34) = -\frac{1}{34}$;
• La pre imagen del número 18 es $\frac{1}{18}$ ya que: $f\ (x) = 18$ entonces, $\frac{1}{x} = 18$ es decir $x = \frac{1}{18}$.

Una parte importante del trabajo matemático consiste en "traducir", pasar de unas formas de representación a otras, y elegir la que facilita la comprensión de una situación

Una función simple se puede representar por las cinco formas antes mencionadas, y suele ser útil ir de una representación a otra para comprender mejor la función.

Resumimos esto en el siguiente diagrama:

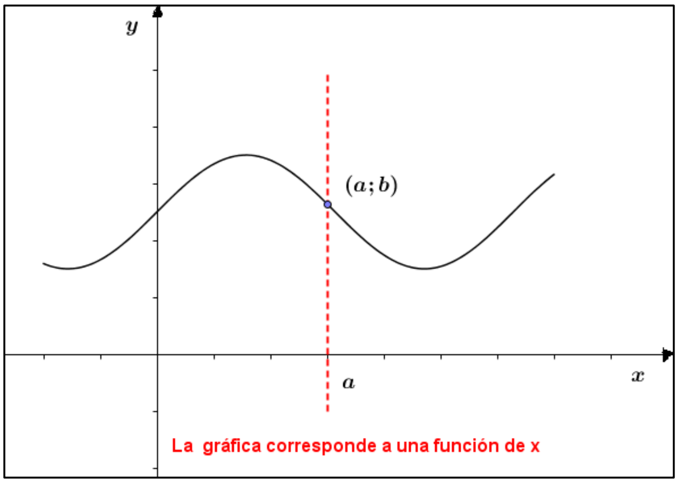


¿Cómo determinar si un gráfico representa una función?

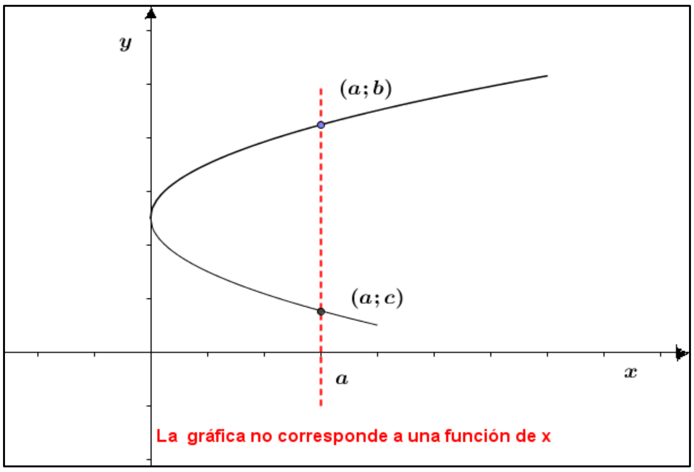
❖ **PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL**

Para determinar si una curva en el plano representa la gráfica de una función de x se puede realizar la prueba de la vertical. Esta prueba consiste en trazar rectas verticales que intercepten a la gráfica.

Diremos que la curva representa a una **función de x** si y solo si las rectas verticales trazadas interceptan a la curva **a lo sumo en un punto.**
Es decir que, si ***todas*** las rectas verticales cortan una sola vez a la gráfica, resulta que la gráfica es una función.



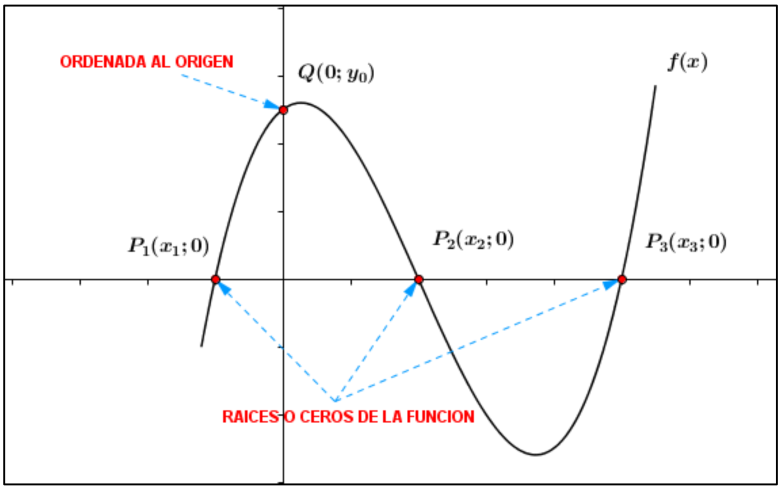
Si ***existe*** una recta vertical que corta a la gráfica más de una vez, no es función.



Si la recta no corta a la gráfica significa que el elemento del eje de las abscisas por donde pasa la recta vertical no pertenece al dominio.

❖ INTERSECCIÓN CON LOS EJES CARTESIANOS

Es importante y resulta muy útil al momento de realizar la representación gráfica de una función determinar, si existen, la intersección de la gráfica con los ejes.



Observemos que el punto donde la gráfica corta el eje de ordenadas o eje *y* es de la forma $(0; f(0))$. Este punto se llama ***ordenada al origen***.

Si el cero está en el dominio de la función, entonces hay punto de corte con el eje de ordenadas y éste es único. ¿Por qué es único? ¿Puede una función tener más de una ordenada al origen? ¿Por qué?

Para encontrar analíticamente la ordenada al origen se sustituye x por cero en la expresión de la función y se calcula y.

De la misma manera, el punto (o los puntos) de intersección de la función con el eje de abscisas, si existen, son de la forma $(x_0\ ,0)$, donde x_0 es la pre imagen (o pre imágenes) de cero. Es decir, son los valores del dominio cuya imagen es igual a cero. Estos puntos se llaman ***ceros o raíces*** de la función. En símbolos:

$$\boldsymbol{x = a \in Dom\, f, es\ un\ cero\ de\ la\ función \Leftrightarrow f(a) = 0}$$

Habrá punto de corte con el eje de abscisas si el cero pertenece al conjunto imagen de la función. En ese caso puede suceder que haya más de un punto de intersección

Para encontrar analíticamente x_0 se sustituye *y* por cero en la expresión de la función y se despeja x.

Ejemplo 5

Determinar, si existen, la intersección de la gráfica de las siguientes funciones con los ejes cartesianos a) $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$

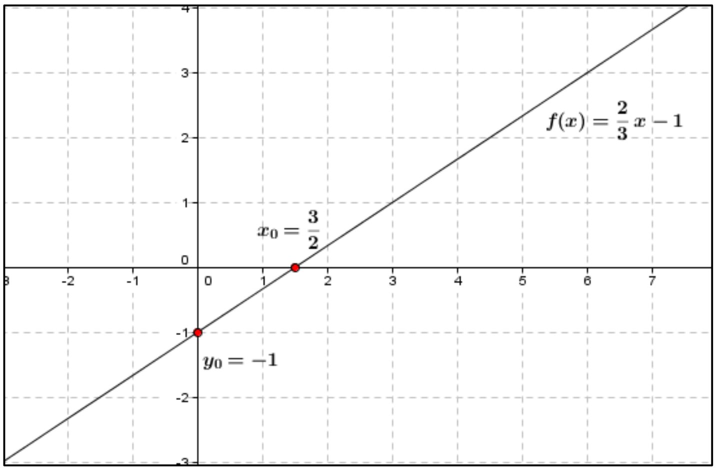
Para encontrar el punto de intersección del gráfico de la función con el eje de ordenadas, debemos encontrar la imagen de 0, es decir: $f(0) = \frac{2}{3}.0 - 1$

$$f(0) = -1$$

Por lo tanto la ordenada al origen de $f(x)$ es igual a -1 y el punto de intersección de la gráfica con el eje y es $(0\ ;\ -1)$.

Si queremos encontrar el punto de intersección de la función con el eje de las x, debemos encontrar la preimagen de 0, es decir el valor de x perteneciente al dominio tal que $f(x) = 0$

Planteamos la ecuación $\frac{2}{3}x - 1 = 0$, y despejando x obtenemos que la raíz de $f(x)$ $es\ x = \frac{3}{2}$. La representación gráfica de $f(x)$ es la recta qe se muestra a continuación:



b) $g(x) = x^2 + 4$

Siguiendo el procedimiento anterior, obtenemos que el punto de intersección del gráfico de $g(x)$ con el eje y es $(0\ , 4)$. Verificarlo

Para encontrar el o los puntos de intersección con el eje x, si existen, hacemos $\boldsymbol{g(x) = 0}$

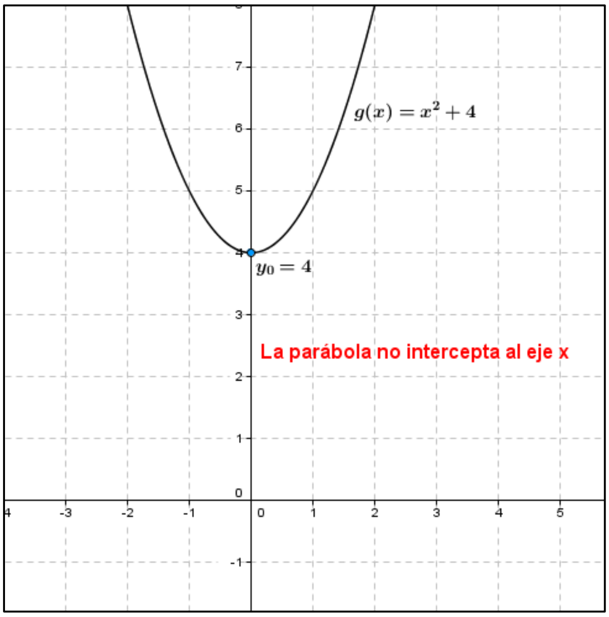
$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$|x| = \sqrt{-4}\ \ \boldsymbol{no\ tiene\ solución\ real}$$

Por lo tanto la función $g(x)$ no posee raíz, es decir que su gráfica no intercepta el eje x en ningún punto.

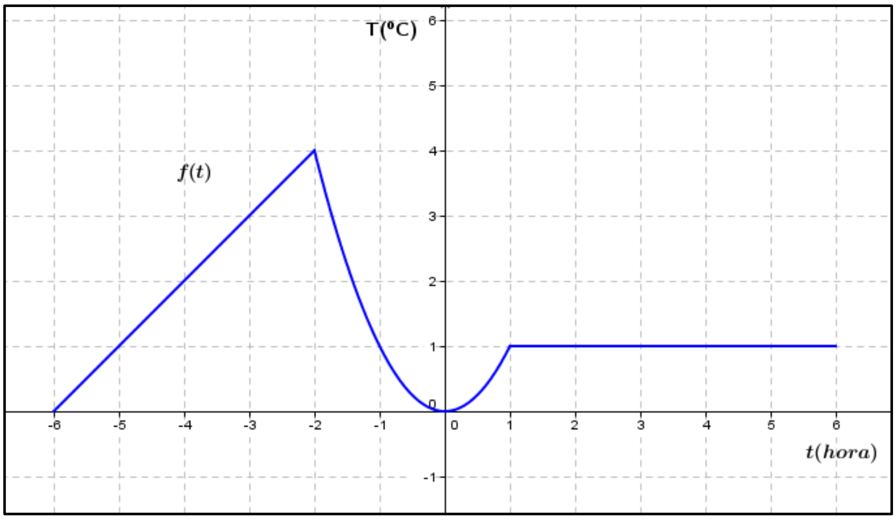
La representación gráfica de $g(x)$ es:



❖ FUNCIÓN ES CRECIENTES, DECRECIENTES Y CONSTANTES

Consideremos el siguiente gráfico:

Para evaluar la temperatura en cada tiempo t (en horas) de una cámara en donde se guardaron semillas de maíz se realizaron registros de la temperatura en ºC de la misma en forma continua desde las seis de la mañana de un día y durante las primeras seis horas del día siguiente.



Para los registros de temperatura observamos cuatro situaciones bien diferentes en la evolución de la temperatura a medida que transcurre el tiempo:

- ✓ Hasta dos horas antes de la medianoche, es decir - 6 < *t* < -2, la temperatura fue aumentando. ¿Cuál fue la máxima temperatura alcanzada?.....................................

- ✓ Luego, y hasta la medianoche, es decir, -2 < *t* < 0, la temperatura fue disminuyendo. ¿Cuál fue la mínima temperatura alcanzada?...

- ✓ Entre la medianoche y la hora 1, es decir 0 < *t* < 1, la temperatura volvió a aumentar, hasta llegar a ....

- ✓ A partir de la hora 1 y hasta finalizar la observación, es decir 1 < *t* < 6, se registró una temperatura constante. ¿De cuántos ºC fue ésta temperatura constante?.........................

Las anteriores observaciones se traducen en lenguaje matemático de la siguiente forma:

• para $t \in (-6, -2)$ la función es **creciente**,

• para $t \in (-2, 0)$ la función es **decreciente**,

• para $t \in (0, 1)$ la función es **creciente**,

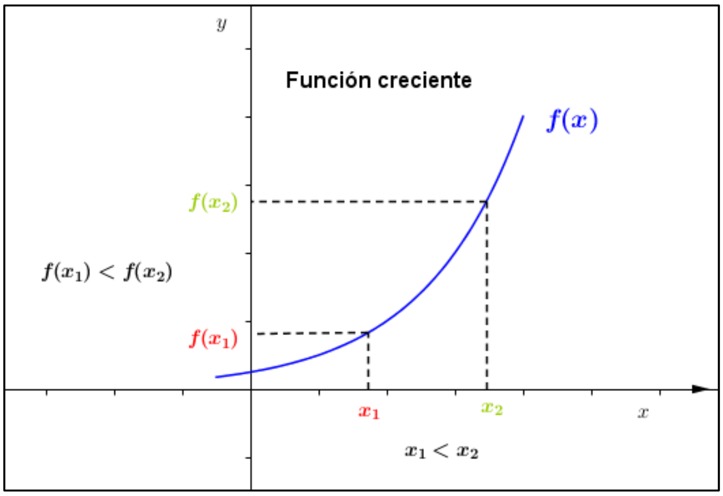
• para $t \in (1, 6)$ la función es **constante**.

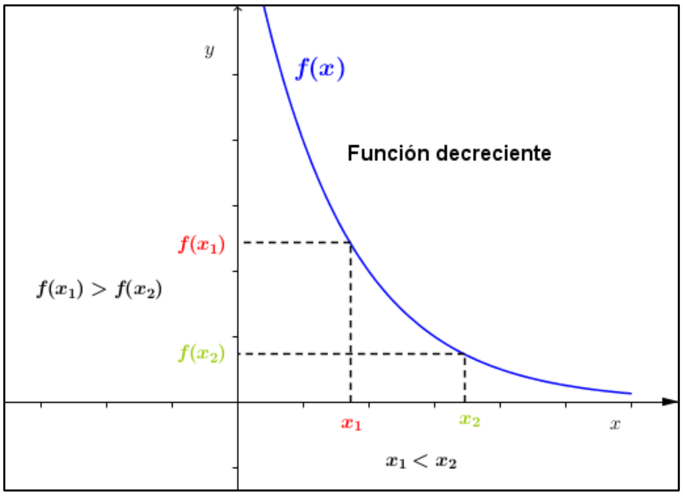
En forma precisa se define:

- Una función ***f*** **se dice constante** en un intervalo $\boldsymbol{I} \subseteq Dom\ f$ si,
  para todo $x \in \boldsymbol{I}\ es\ f\ (x) = c$ donde *c* es un número real

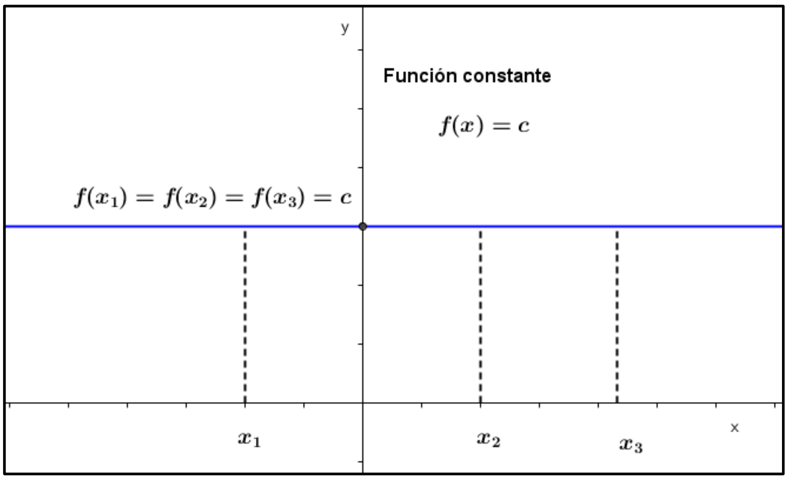
- Una función ***f*** **se dice creciente** en un intervalo $\boldsymbol{I} \subseteq Dom\ f$ si:
  para todo $x_1, x_2 \in \boldsymbol{I}\ con\ x_1 < x_2$ implica $f\ (x_1) < f\ (x_2)$.

- Una función ***f* se dice decreciente** en un intervalo **I** ⊆ $Dom\,f$ si:
para todo $x_1, x_2 \in \boldsymbol{I}$ con $x_1 < x_2$ implica $f\,(x_1) > f\,(x_2)$.





Si una función es creciente en un intervalo su gráfico ***"sube"*** a medida que se incrementan los valores de la variable independiente;
Si una función es decreciente en un intervalo su gráfico ***"baja"*** a medida que se incrementan los valores de la variable independiente.
Si una función es constante en un intervalo su gráfico ***"no baja ni sube"*** a medida que se incrementan los valores de la variable independiente.

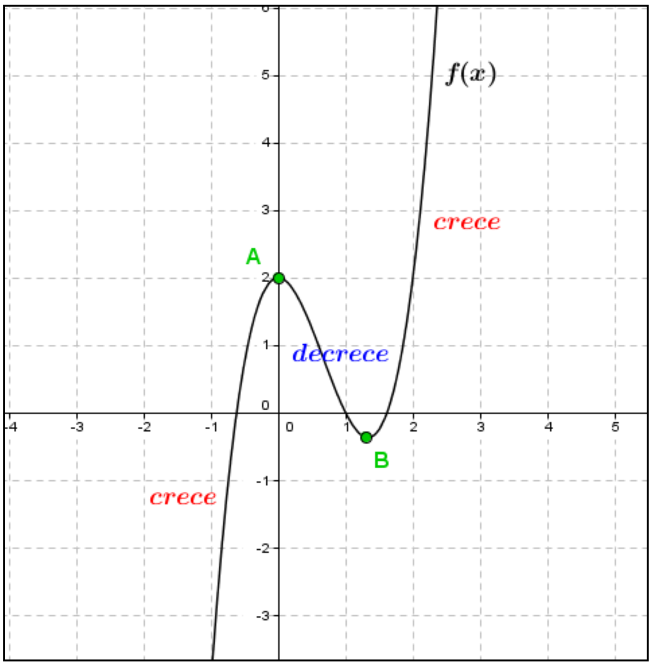


❖ <u>VALOR MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN</u>

Observemos nuevamente el gráfico de la función $f(t)$. La función crece, decrece, crece y por último es constante. Los puntos donde $f(t)$ deja de crecer para comenzar a decrecer o de decrecer para comenzar a crecer son importantes en el análisis de las funciones. Estos puntos se llaman **extremos relativos** de la función.

Reconocer en el gráfico de una función un máximo o mínimo relativo es simple. El punto donde la función deja de crecer para comenzar a decrecer se llama **máximo relativo**.
De manera análoga, el punto donde la función deja de decrecer para comenzar a crecer se llama **mínimo relativo**.

Ejemplo 6
En éste grafico de la función $f(x)$ se puede observar que la función crece en el intervalo $(-\infty; 0)$, luego decrece en el intervalo $(0; 1.25)$ y finalmente en el intervalo $(1.25;\ +\infty)$ crece.
El punto $A = (0; 2)$ es un máximo relativo porque es donde la función deja de crecer para comenzar a decrecer y el punto $B = (1.25; -0.25)$ es un mínimo relativo porque es donde la función deje de decrecer para comenzar a crecer.



A continuación, daremos una definición formal de máximo y mínimo relativo.

Sea D el dominio de una función $f(x)$ y $\boldsymbol{a} \in D$,

- El punto $(\boldsymbol{a}, f(a))$ es un máximo relativo de la función si $f(x) < f(\boldsymbol{a})$ para cualquier x cercano a $\boldsymbol{a}$.
- El punto $(\boldsymbol{a}, f(a))$ es un mínimo relativo de la función si $f(\boldsymbol{a}) < f(x)$ para cualquier x cercano a $\boldsymbol{a}$

❖ CONJUNTO DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD

Llamamos **intervalo de positividad** de una función al subconjunto del dominio en el cual f es positiva, es decir:

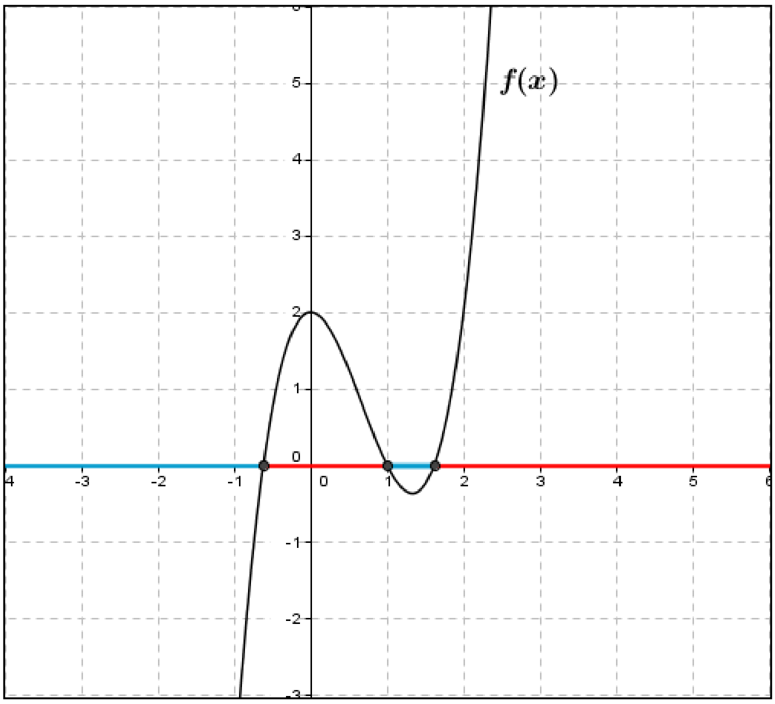
$$C^{+}(f) = \{x \in Domf / f(x) > 0\}$$

Análogamente, el **intervalo de negatividad** de f es el subconjunto del dominio donde la función es negativa, es decir:

$$C^{-}(f) = \{x \in Domf / f(x) < 0\}$$

Los valores de x que determinan éstos conjuntos son las raíces de la función.

Ejemplo 7
Consideremos el gráfico de la función anterior.
El intervalo de positividad de la función es: $(-0.6\,;1) \cup (1.6;\ +\infty)$ y el intervalo de negatividad es: $(-\infty; -0.6) \cup (1; 1.6)$



❖ FUNCIONES DEFINIDA A TROZOS O POR PARTES

En matemáticas, una **función definida a trozos** (también conocida como **función por partes**) es una función cuya definición (la regla que define la dependencia), cambia dependiendo del valor de la variable independiente, es decir, que su regla de definición incluye más de una fórmula dada en **conjuntos disjuntos de su dominio** (conocidos como subdominios).¿Por qué deben ser éstos conjuntos disjuntos?

Ejemplo 8:
Consideremos la siguiente función $g(x)$ definida a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & si\ x \leq 0 \\ x+1, & si\ x > 0 \end{cases}$$

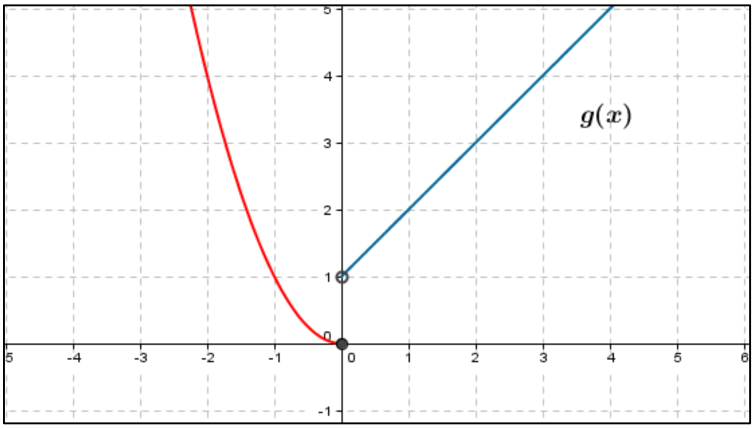
No son dos funciones, sino una función en la cual la regla que la define se da en *dos partes o trozos* (puede estar definida en más de dos partes). En este caso, una parte de la función está definida para los números reales negativos junto con el cero y la otra parte de $g(x)$ está definida para los números positivos. De esta manera si quisiéramos calcular la imagen de $x = -2$, es decir $g(-2)$, debemos usar la regla x^2:

$$g(-2) = (-2)^2 = 4$$

De manera similar si desearíamos averiguar el valor de $g(3)$, como $x = 3$ es positivo usamos la regla $x + 1$:

$$g(3) = 3 + 1 = 4$$

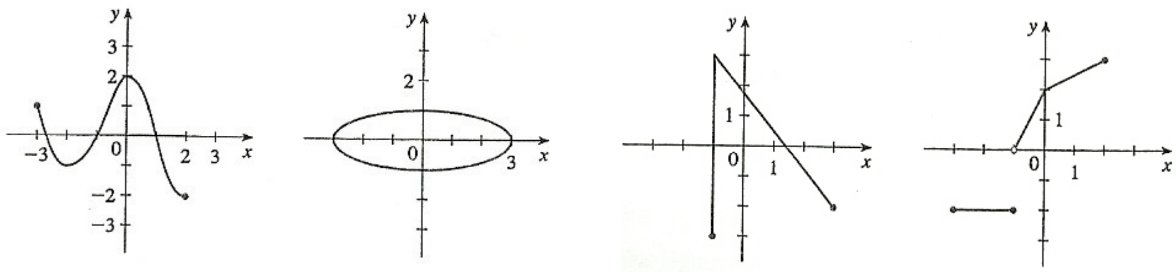
La representación gráfica de $g(x)$ es:



ACTIVIDADES

Ejercicio 1: Determinar cuál de las siguientes curvas representan la gráfica de una función de $\boldsymbol{x}$. Justificar su respuesta.

a) b) c) d)



Ejercicio 2: Determinar el **máximo dominio** de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{3}{x^2-49}$

b) $g(x) = \sqrt{2-3x}$

c) $y = 0{,}5x - 2$

Ejercicio 3: Expresar las siguientes reglas en notación de función.

a) El doble de la suma entre x y 5.
b) La raíz cuadrada de la suma entre la séptima parte de x y 4.
c) El cuadrado de la diferencia entre x y 3
d) La diferencia entre el cuadrado de x y 3

Ejercicio 4: En base a la siguiente tabla que muestra la estatura promedio de los adolescentes con relación a su edad.

Edad en años (t)	11	12	13	14	15	16
Estatura promedio en cm (h)	140	147	153	158	162	165

Conteste las siguientes cuestiones:
a) ¿Cuánto cambia la estatura de los adolescentes de los 11 a los 12 años?
b) ¿Cuánto cambia la estatura de los adolescentes de los 12 a los 13 años?
c) ¿Cuánto cambia la estatura de los adolescentes de los 14 a los 16 años?
d) ¿En qué par de edades consecutivas el cambio de estatura es mayor?
e) ¿En qué par de edades consecutivas el cambio de estatura es menor?
f) ¿El cambio de la estatura promedio por año es constante o variable?

Ejercicio 5: Se coloca en el fuego una olla con agua a 10 grados centígrados (10 ºC). La temperatura del agua va aumentando 15 ºC cada minuto, hasta llegar a hervir (100 ºC) y se mantiene hirviendo (en 100 ºC) hasta que la retiran del fuego, 11 minutos después de haberla colocado.

a) Realizar un gráfico que represente la temperatura del agua descripta en función del tiempo
b) ¿Qué temperatura tiene el agua 1 minuto después de estar en el fuego?
c) ¿Y a los 3 minutos?
d) ¿Cuántos minutos tarda en llegar a hervir?
e) ¿Cuánto tiempo sigue hirviendo?
f) ¿En qué momento alcanzó los 40 ºC?
g) ¿Llegó en algún momento a los 120 ºC?

Ejercicio 6: Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evaluar.

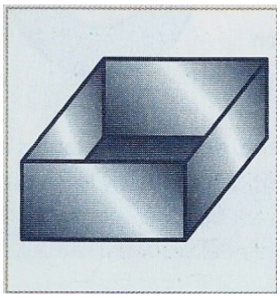
a) $f(0) =$
b) $f(-1) =$
c) $f\left(\frac{2}{3}\right) =$
d) $f(a) =$
e) $f(a+h) =$
f) $\frac{f(a) - f(a+h)}{h} =$

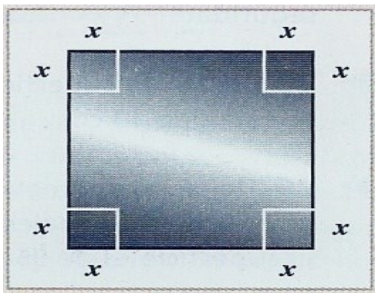
Ejercicio 7: Un astronauta pesa 60 kg. Cuando se encuentra a h millas de la Tierra, su peso se expresa mediante la siguiente función.

$$p(h) = 60.\left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

Responder:
a) ¿Cuál es el peso del astronauta cuando se encuentra a 100 millas de la Tierra?
b) Construir una tabla de valores en la que se observe la variación del peso del astronauta cuando la altura va de 0 a 500 millas.
c) ¿Qué sucede a medida que la distancia desde la Tierra aumenta?
d) ¿Para qué valores de h tiene sentido la función?
e) Ubicar los puntos obtenidos en el inciso b) en un sistema de ejes cartesianos

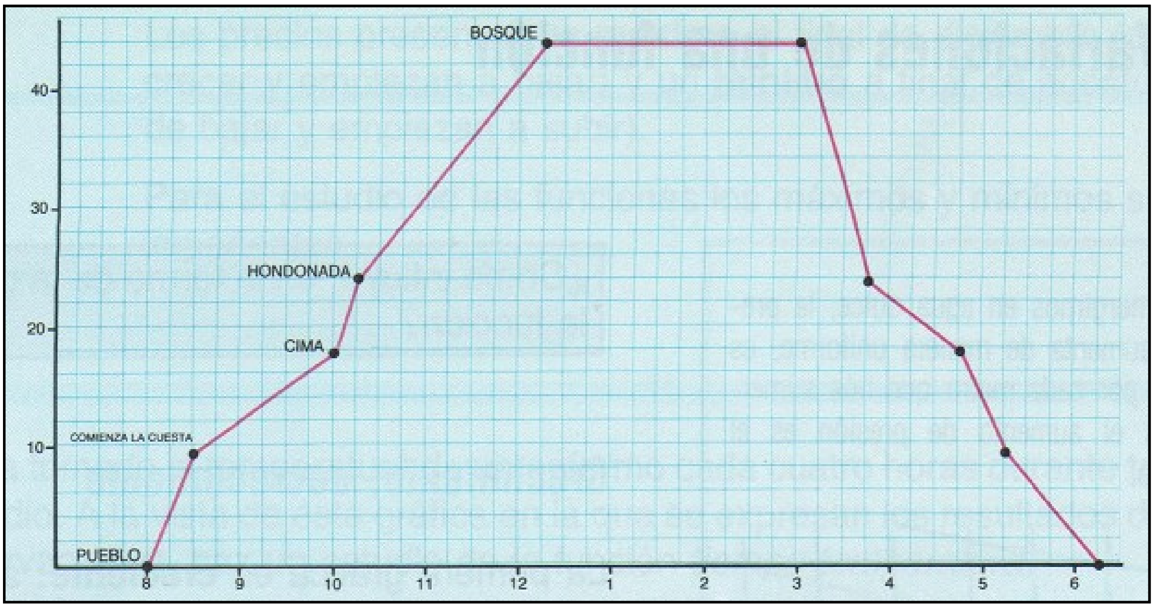
Ejercicio 8: Con una lámina rectangular de 40 x 30 cm. queremos hacer una caja como muestra la figura.





a) Buscar la expresión del volumen de la caja en función de *x*.
b) ¿Cuál es el dominio?
c) Hacer un gráfico aproximado a partir de una tabla de valores.

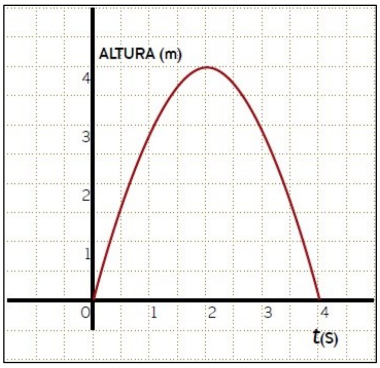
Ejercicio 9: Hacemos una excursión en bicicleta a un bosque que está a 44 Km. de nuestro pueblo. Para llegar hay que seguir un itinerario con subidas y bajadas.



Mirando las gráficas, contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Qué significa cada cuadradito en el eje horizontal de la gráfica *tiempo-espacio*? ¿Y en el eje vertical?
2. ¿A qué hora salimos?
3. ¿Cuántos Km. hay, aproximadamente, desde el comienzo de la primera cuesta hasta la cima? ¿Cuánto tiempo tardamos en subirla?
4. ¿Cuántos Km. hay de bajada? ¿Qué tiempo se tarda?
5. ¿Qué distancia hay desde la hondonada hasta el bosque? ¿Cuánto tardamos en recorrerla?
6. ¿Cuánto tiempo estamos descansando en el bosque?
7. ¿Cuánto tardamos en ir del pueblo al bosque? ¿Y del bosque al pueblo? ¿A qué crees que puede deberse la diferencia?

Ejercicio 10: La altura que alcanza una pelota arrojada hacia arriba en función del tiempo se representa mediante la gráfica siguiente.



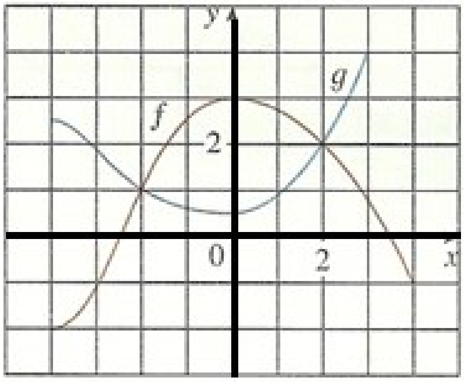
a) ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?

b) ¿Cuál es la altura máxima y en qué tiempo ocurre?

c) ¿En qué intervalo de tiempo la función crece y en cuál decrece?

d) ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función representada en el gráfico?

Ejercicio 11: Se proporciona las siguientes gráficas de f y g.



a) Dar los valores de $f(-4)\ y\ g(3)$

b) ¿Para cuáles valores de *x* se tiene que $f(x) = g(x)$?

c) Estimar la solución de la ecuación $f(x) = -1$

d) ¿En qué intervalo la función f es decreciente?

e) Dar el dominio y la imagen de f.

f) Dar el dominio y la imagen de g.

Ejercicio 12: Completar las siguientes tablas:

$i)\quad f(x) = 2.(x-1)^2$

x		$f(x)$		$(x;\ f(x))$
-1,25				
0				
1				
2,5				
3				

$ii)\quad g(x) = |2x+3|$

x		$g(x)$	$(x;\ g(x))$
-3			
-1,5			
-2,5			
0			
1			

a) Ubicar, en cada caso, los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos

Ejercicio 13: Expresar las siguientes funciones coloquialmente.

a) $f(x) = \frac{x-4}{3}$ b) $g(x) = \sqrt{0{,}5+x}$ c) $h(x) = \left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

Ejercicio 14: Evaluar la función definida por partes en los valores indicados:

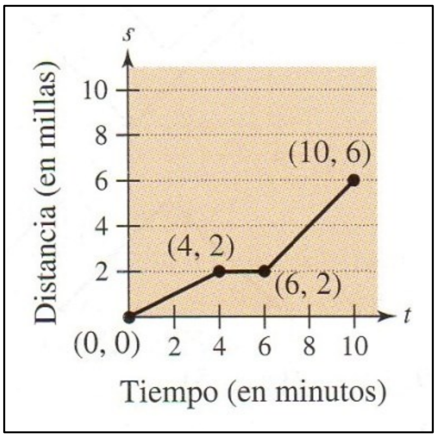
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 0 \\ \sqrt{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

$f(-2) =$………….. $f(-1) =$………….. $f(0) =$………….. $f(2) =$………….. $f(9) =$…………..

b) $g(x) = \begin{cases} 3 & si\ x < -1 \\ \sqrt{x+2} & si -1 \leq x < 4 \\ 2x-3 & si\ x \geq 4 \end{cases}$

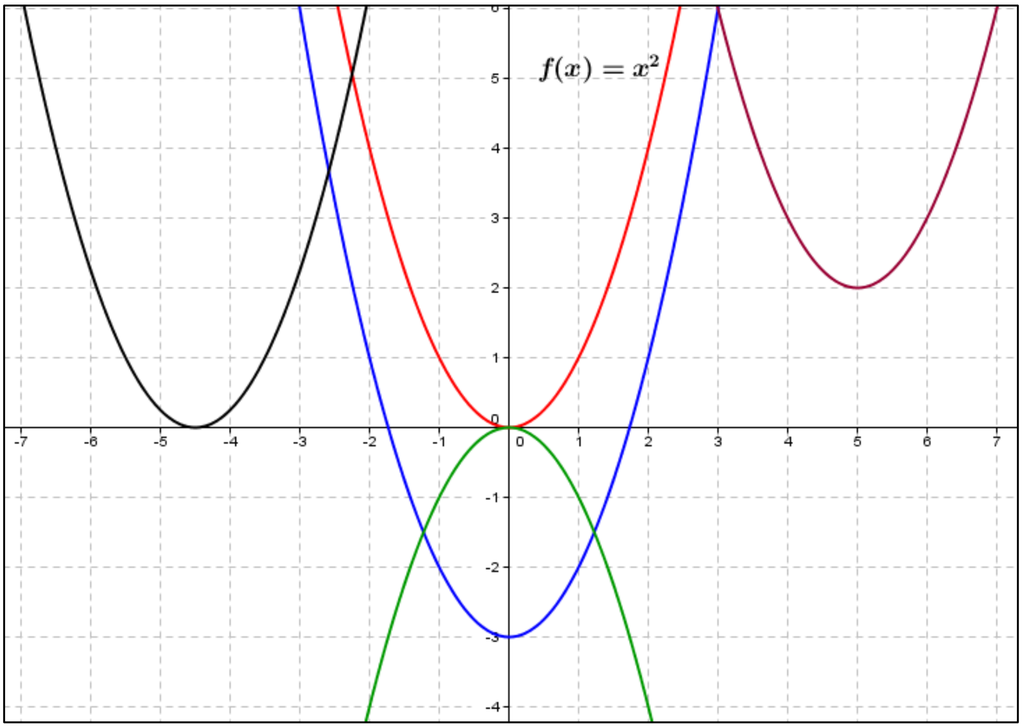
$g(-2{,}3) =$…………..$g(-1) =$………….. $g(0) =$………….. $g(4) =$………….. $g(5{,}2) =$…………..

Ejercicio 15: En el siguiente grafico se muestra la distancia que recorre un estudiante en su camino habitual de 10 minutos a la escuela. Describir verbalmente las características del recorrido del estudiante a la escuela.



❖ TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Observemos la siguiente familia de gráficas. Al comparar la gráfica de $f(x) = x^2$ con las restantes parábolas vemos que tienen la misma forma.



Cada una de las gráficas anteriores es una trasformación de la gráfica de $f(x) = x^2$. Los tres tipos básicos de trasformaciones ilustradas por estas parábolas son las traslaciones verticales, las traslaciones horizontales y las reflexiones. Por ejemplo, si consideramos que $f(x) = x^2$ es la función original, las transformaciones mostradas pueden representarse por medio de las siguientes ecuaciones:

$y = f(x) - 3$ Traslación vertical de 3 unidades hacia abajo.

$y = f(x + 4{,}5)$ Traslación horizontal de 4,5 unidades hacia la izquierda.

$y = -f(x)$ Reflexión respecto al eje x.

$y = f(x - 5) + 2$ Traslación de 5 unidades hacia la derecha y traslación vertical de 2 unidades hacia arriba.

Las transformaciones las podemos resumir en la siguiente tabla:

TIPOS BÁSICOS DE TRASFORMACIONES ($c > 0$)	
Gráfica original	$y = f(x)$
Traslación horizontal de c unidades hacia la derecha	$y = f(x - c)$
Traslación horizontal de c unidades hacia la izquierda	$y = f(x + c)$
Traslación vertical de c unidades hacia abajo	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de c unidades hacia arriba	$y = f(x) + c$
Reflexión respecto al eje x	$y = -f(x)$
Reflexión respecto al eje y	$y = f(-x)$
Reflexión respecto al origen de coordenadas	$y = -f(-x)$

La importancia en reconocer las transformaciones es facilitar el trabajo al momento de representar gráficamente nuevas funciones

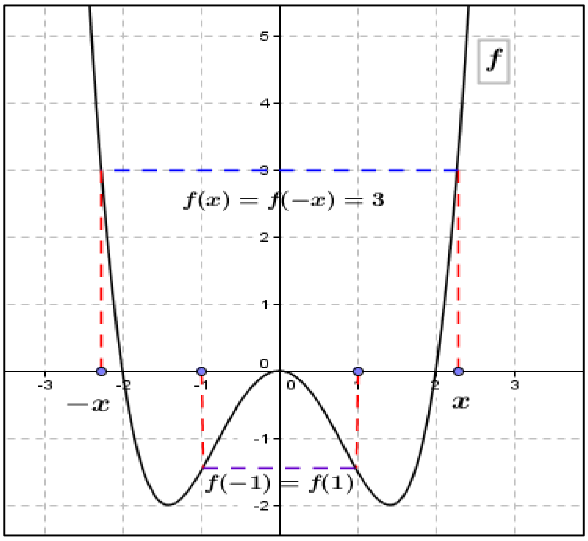
SIMETRÍA

Algunas funciones poseen la característica de simetría. Esta característica es un aliado ya que facilita su representación gráfica. Las funciones pueden presentar 2 tipos de simetrías.

- <u>Simetría par o función par</u>:

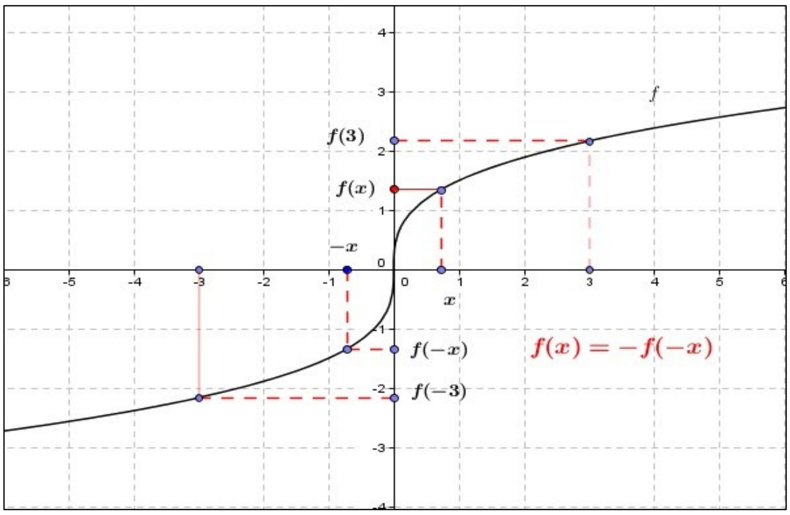
Diremos que una función f es par si su gráfica es simétrica respecto del eje Y. Analíticamente, se cumple que para cualquier x de su dominio se verifica que $\boldsymbol{f(x) = f(-x)}$
Es decir, que cada $\boldsymbol{x}$ y su opuesto $-\boldsymbol{x}$ poseen la misma imagen. Si se dobla la hoja a lo largo del eje y, se verifica que las ramas de la gráfica coinciden

<u>Ejemplo 7</u>:
Esta función es par ya que es simétrica respecto al eje y



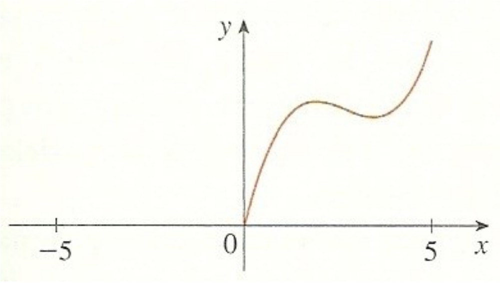
- <u>Simetría impar o función impar</u>:

Diremos que una función f es impar si su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas. Analíticamente, se cumple que para cualquier x de su dominio se verifica que $\boldsymbol{f(x) = -f(-x)}$.
Es decir, que cada $\boldsymbol{x}$ y su opuesto $-\boldsymbol{x}$ poseen imagen opuesta.

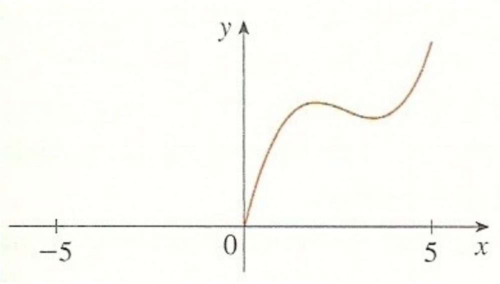


Ejercicio 16: Una función f tiene el dominio $[-5; 5]$ y se muestra una parte de su gráfica.

a) Completar la gráfica de f si se sabe que ésta es **par.**



b) Completar la gráfica de f si se sabe que ésta es **impar**.

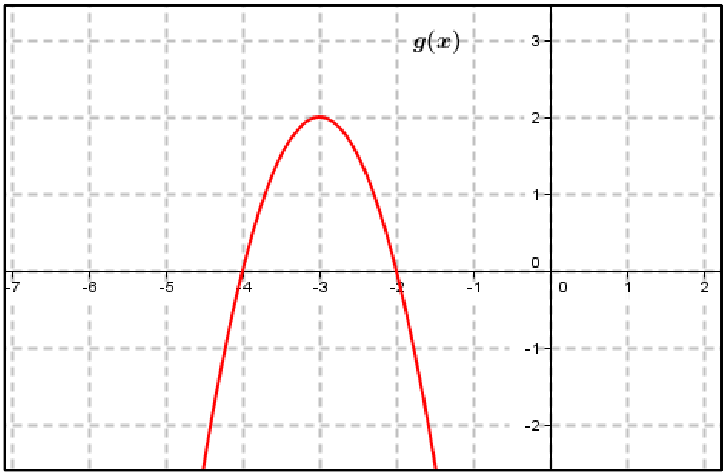


Ejercicio 17:

a) Si el punto $(5, 6)$ está sobre la gráfica de una función **par**, ¿Cuál otro punto debe estar también sobre la gráfica?
b) Si el punto $(5, 6)$ esta sobre la gráfica de una función **impar**, ¿Cuál otro punto debe estar también sobre la gráfica?

Ejercicio 18: Leer las siguientes afirmaciones y escribir V (verdadero) o F (falso), teniendo en cuenta el gráfico de la función $g(x)$.

a) La función $g(x)$ crece en el intervalo $(-\infty; 2)$...............
b) La función tiene un máximo en $(-3; 2)$.................
c) En el intervalo $(-2; +\infty)$ la función $g(x)$ es decreciente...........
d) La función $g(x)$ decrece en el intervalo $(-3; +\infty)$ ....
e) La función crece en el intervalo $(-4; -2)$.........................



Ejercicio 19: Leer y responder las siguientes preguntas. Explicar las respuestas.

a) Si el intervalo de crecimiento de una función f es $(-\infty; 4)$ entonces, ¿la función decrece en el intervalo $(4; +\infty)$?
b) Si el intervalo de decrecimiento de una función es $(-\infty; -3{,}5)$ y el de crecimiento es $(-3{,}5; +\infty)$, entonces en el punto de abscisa -3,5 la función ¿posee un mínimo relativo?

Ejercicio 20:

a) Realizar un gráfico de una función *h que cumpla con las siguientes características.*

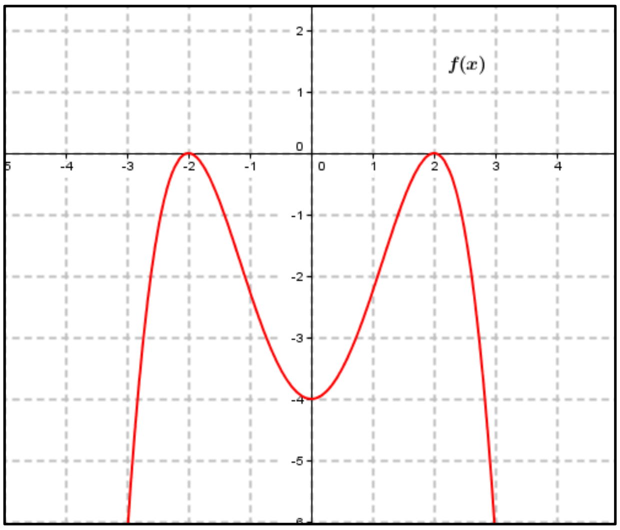
$* \, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad * \, Im\ h: (-\infty; 3)$ $\quad * \, C^{+} = (-2; 1)$ $\quad * \, C^{-} = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

$* \, Intervalo\ de\ crecimiento = (-\infty; -1)$ $\quad * \, Intervalo\ de\ decrecimiento = (-1; +\infty)$

b) *Responder teniendo en cuenta lo realizado en el inciso anterior:*

i. ¿Cuál es el máximo de la función?
ii. ¿Cuál es la ordenada al origen?
iii. ¿Cuántas raíces tiene h(x)? ¿cuáles son?

Ejercicio 21: Teniendo en cuenta el siguiente gráfico donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, marcar con una cruz la opción correcta.



i. El intervalo de crecimiento de $f(x)$ es:

$(-\infty; 2) \cup (-4; 2)$ ◯ $\quad (-\infty;\ -2) \cup (0; 2)$ ◯ $\quad (-4; -2) \cup (0; 2)$ ◯ $\quad (-\infty; 2)$ ◯

ii. El intervalo de decrecimiento de $f(x)$ es:

$(-2; 0) \cup (0; 2)$ ◯ $\quad (-2;\ 0) \cup (2; +\infty)$ ◯ $\quad (-2; +\infty)$ ◯ $\quad (-2; 2)$ ◯

iii. Teniendo en cuenta la simetría, $f(x)$ es:

Par ◯ Impar ◯ Sin paridad ◯

iv. El conjunto imagen es:

$\mathbb{R}$ ◯ $\quad \mathbb{R}_0^+$ ◯ $\quad \mathbb{R}^-$ ◯ $\quad \mathbb{R}_0^-$ ◯ $\quad \mathbb{R} - \{-2; 2\}$ ◯

v. ¿Cuál es el conjunto de negatividad?

$\mathbb{R}$ ◯ $\quad \mathbb{R}_0^+$ ◯ $\quad \mathbb{R}^-$ ◯ $\quad \mathbb{R}_0^-$ ◯ $\quad \mathbb{R} - \{-2; 2\}$ ◯

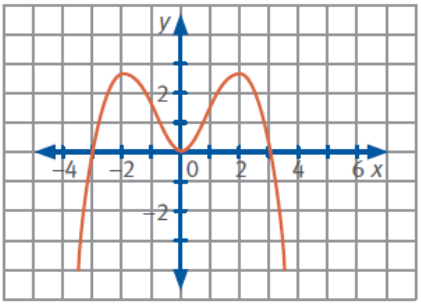
vi. ¿Cuál o cuáles son los máximos?

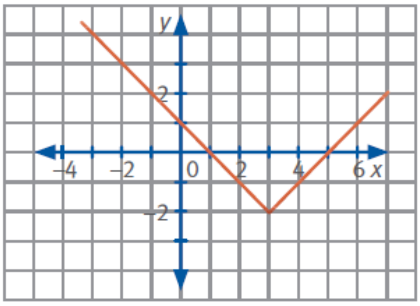
$(-2; 0)$ ◯ $(0; -4)$ ◯ $(0;\ -2)$ ◯ $(2; 0)$ ◯

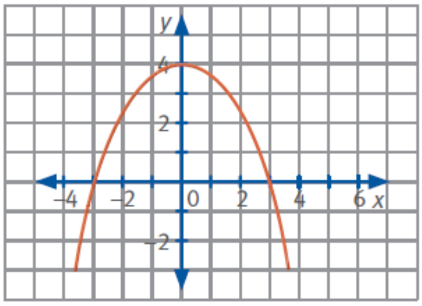
vii. La imagen de $x = -1$ es aproximadamente igual a:

-1,5 ◯ -2 ◯ -2,25 ◯ -3 ◯

Ejercicio 22: Observar los siguientes gráficos e indicar, en cada caso, la información requerida.







Ord. al origen =

Raíces =

C^+ =

C^- =

Ord. al origen =

Raíces =

C^+ =

C^- =

Ord. al origen =

Raíces =

C^+ =

C^- =

Ejercicio 23: En los países anglosajones suelen usar la escala Fahrenheit para medir temperaturas. En esta escala el punto de congelación del agua se alcanza a los 32ºF y el de ebullición a los 212ºF.

Nosotros usamos la escala Celsius en la que esos puntos se alcanzan a 0ºC y 100ºC respectivamente.

La fórmula que relaciona los grados Fahrenheit y los grados Centígrados es

$$\boldsymbol{t°C = \frac{5}{9} . (t°F - 32)},$$

¿A cuántos ºC equivalen 80ºF? ¿A cuántos ºF equivalen 36ºC?

Ejercicio 24: Conocer la distancia a la que se encuentra una tormenta de un observador y saber además si se está aproximando o alejando es bastante sencillo: basta **contar los segundos que transcurren desde que se produce el relámpago hasta que se escucha el trueno.**

La diferencia de tiempo entre ambos fenómenos se debe a que, mientras la luz viaja a una velocidad de 300.000 kilómetros por segundo, el sonido lo hace a tan sólo 331 metros por segundo. Para calcular la distancia en kilómetros aproximada a la que se halla una tormenta de nosotros, únicamente hay que aplicar la siguiente fórmula:

Distancia= Nº de segundos/3

Así, si entre el relámpago y el trueno existe un espacio de tiempo de seis segundos, esto quiere decir que la tormenta está a una distancia de dos kilómetros.

a) Trazar la gráfica de la función.

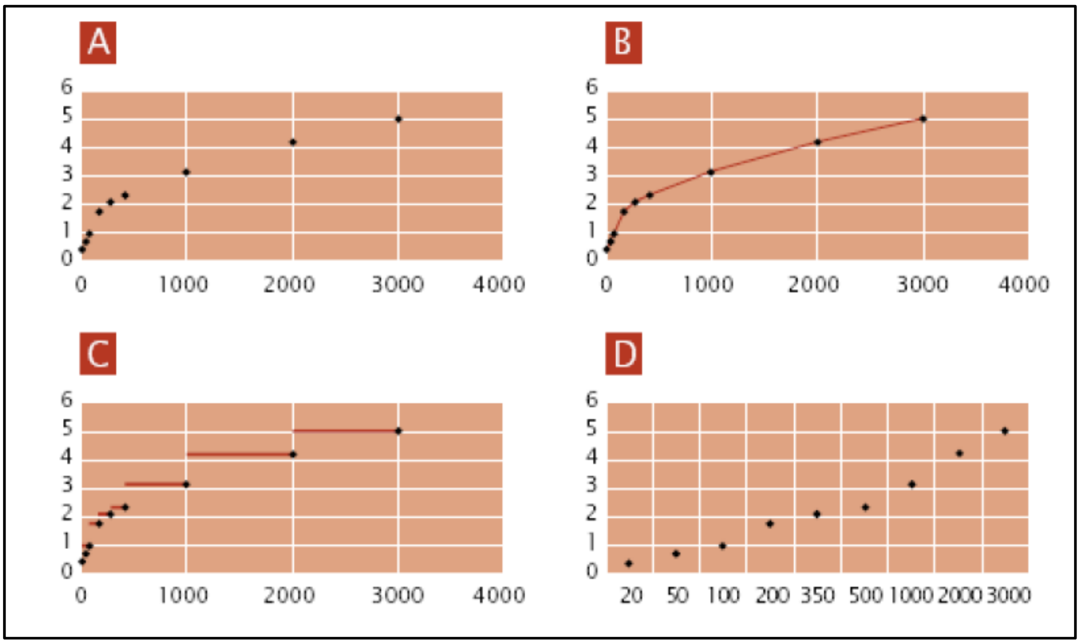
b) Si la longitud del intervalo del tiempo entre el rayo y el trueno es ahora de 8 segundos, ¿qué tan lejos está el centro de la tormenta?

Ejercicio 25: Las tarifas postales de Zedlandia están en basadas en el peso de los paquetes (redondeado a gramos), como se muestra en la tabla siguiente.

Peso (redondeado a gramos)	Tarifa
Hasta 20 g	0,46 zeds
21 g – 50 g	0,69 zeds
51 g – 100 g	1,02 zeds
101 g – 200 g	1,75 zeds
201 g – 350 g	2,13 zeds
351 g – 500 g	2,44 zeds
501 g – 1000 g	3,20 zeds
1001 g – 2000 g	4,27 zeds
2001 g – 3000 g	5,03 zeds

Responder:

a) ¿Cuál de los siguientes gráficos es la mejor representación de las tarifas postales en Zedlandia? (El eje horizontal muestra el peso en gramos, y el eje vertical muestra el costo en zeds.) Justificar tu respuesta.



b) Juan quiere enviar a un amigo dos objetos que pesan 40 g y 80 g respectivamente.
Según las tarifas postales de Zedlandia, decide si es más barato enviar los dos objetos en un único paquete o enviar los objetos en dos paquetes separados. Escribe tus cálculos para hallar el coste en los dos casos

Ejercicio 26: En una carrera de velocidad, el "tiempo de reacción" es el tiempo que transcurre entre el disparo de salida y el instante en que el atleta abandona el taco de salida. El "tiempo final" incluye tanto el tiempo de reacción como el tiempo de carrera.
En la tabla siguiente figura el tiempo de reacción y el tiempo final de 8 corredores en una carrera de velocidad de 100 metros.

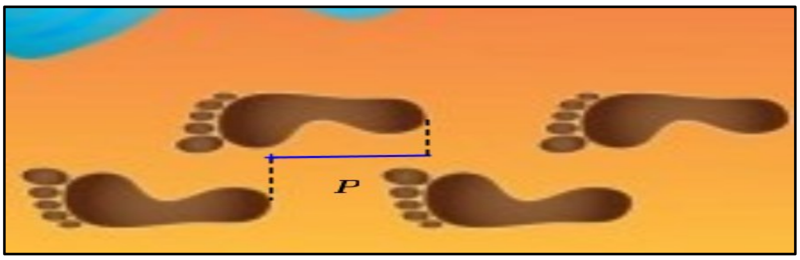
Calle	Tiempo de reacción (seg)	Tiempo final (seg)
1	0,147	10,09
2	0,136	9,99
3	0,197	9,87
4	0,180	No acabó la carrera
5	0,210	10,17
6	0,216	10,04
7	0,174	10,08
8	0,193	10,13

Pregunta 1
Identifica a los corredores que ganaron las medallas de oro, plata y bronce en esta carrera. Completa la tabla siguiente con su número de calle, su tiempo de reacción y su tiempo final.

Medalla	Calle	Tiempo de reacción (seg)	Tiempo final (seg)
ORO			
PLATA			
BRONCE			

Pregunta 2
Hasta la fecha, nadie ha sido capaz de reaccionar al disparo de salida en menos de 0,110 segundos.
Si el tiempo de reacción registrado para un corredor es inferior a 0,110 segundos, se considera que se ha producido una salida falsa porque el corredor tiene que haber salido antes de oír la señal.
Si el tiempo de reacción del corredor que ha ganado la medalla de bronce hubiera sido menor, ¿podría haber ganado la medalla de plata? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 27:



El dibujo muestra las huellas de un hombre caminando en la arena. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas.
Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ da una relación aproximada entre n y P donde:
n es el número de pasos por minuto, y P es la longitud del paso en metros.

Pregunta 1
Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y éste da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Enrique? Muestra tus cálculos

Pregunta 2
Bernardo sabe que sus pasos son de 0,80 metros. El caminar de Bernardo se ajusta a la fórmula. Calcula la velocidad a la que anda Bernardo en metros por minuto y en kilómetros por hora. Muestra tus cálculos.

Ejercicio 28: Las infusiones intravenosas (goteo) se utilizan para administrar líquidos y fármacos a los pacientes. Las enfermeras tienen que calcular la frecuencia de goteo *G* de las infusiones intravenosas en gotas por minuto.
Utilizan la fórmula $\boldsymbol{G = \frac{g.v}{60.n}}$, donde

$\boldsymbol{g}$ es el factor de goteo expresado en gotas por mililitro (ml)
$\boldsymbol{v}$ es el volumen de la infusión intravenosa en ml
$\boldsymbol{n}$ es el número de horas que ha de durar la infusión intravenosa.

Responder:

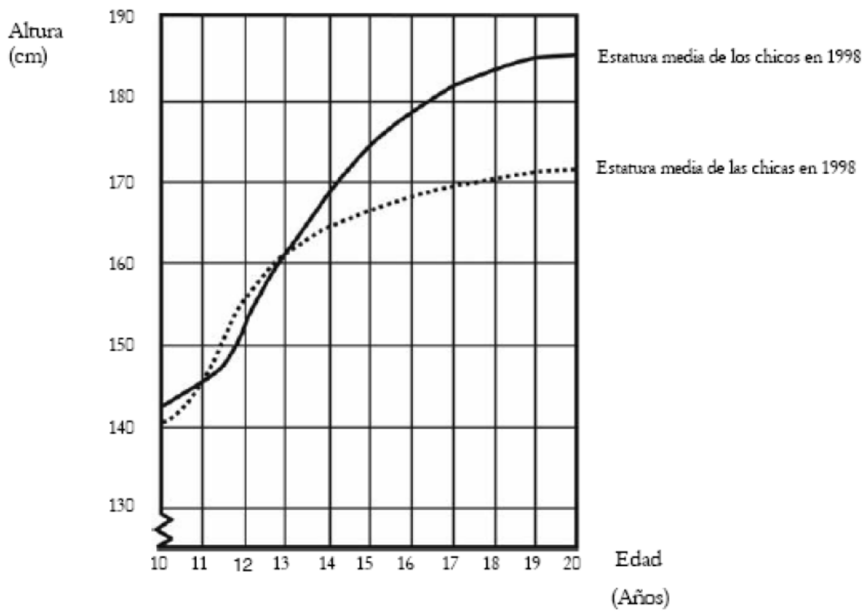
a) Una enfermera quiere duplicar la duración de una infusión intravenosa.

Explica exactamente cómo varía *G* si se **duplica** *n* pero sin variar *g* y *v*.

b) Las enfermeras también tienen que calcular el volumen de la infusión intravenosa, *v,* a partir de la frecuencia de goteo, *G*.

Una infusión intravenosa, con una frecuencia de goteo de 50 gotas por minuto, ha de administrarse a un paciente durante 3 horas. El factor de goteo de esta infusión intravenosa es de 25 gotas por mililitro.
¿Cuál es el volumen de la infusión intravenosa expresado en ml?
Volumen de la infusión intravenosa: ...... ml

Ejercicio 29: La estatura media de los chicos y las chicas de Holanda en 1998 están representadas en el siguiente gráfico:



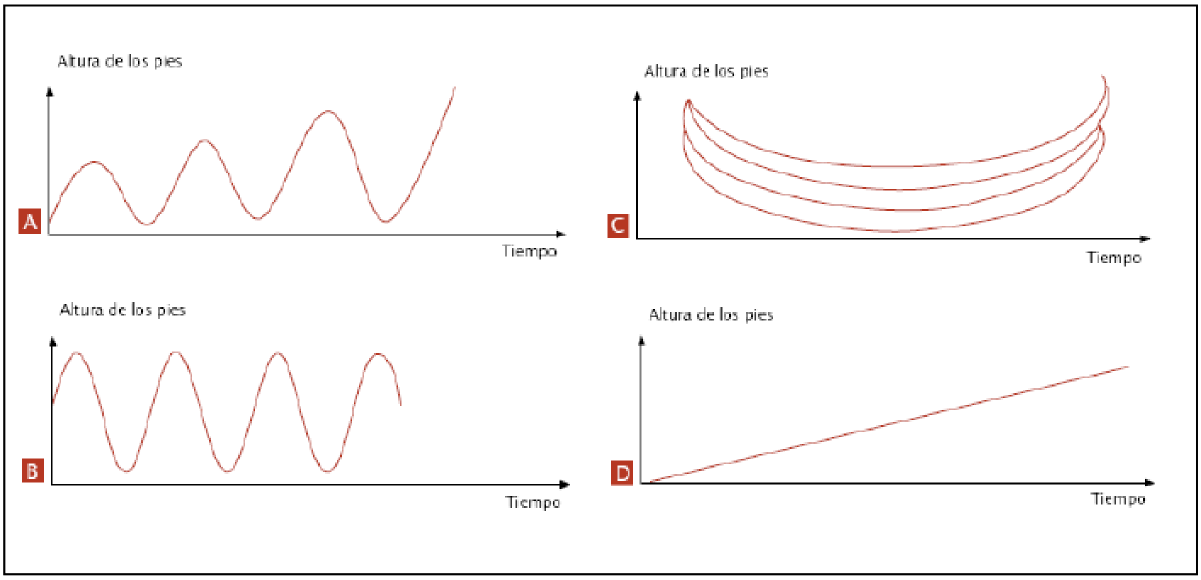
Pregunta 1
Desde 1980 la estatura media de las chicas de 20 años ha aumentado 2,3 cm, hasta alcanzar los 170,6 cm. ¿Cuál era la estatura media de las chicas de 20 años en 1980?
Respuesta: ………..cm

Pregunta 2
Explica cómo el gráfico muestra que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas disminuye a partir de los 12 años en adelante.

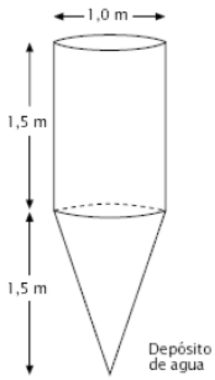
Pregunta 3
De acuerdo con el gráfico anterior, ¿en qué periodo de la vida las chicas son, por término medio, más altas que los chicos de su misma edad?

Ejercicio 30: Mohammed está sentado en un columpio. Empieza a columpiarse. Está intentando llegar tan alto como le sea posible.

¿Cuál de estos gráficos representa mejor la altura de sus pies por encima del suelo mientras se columpia?

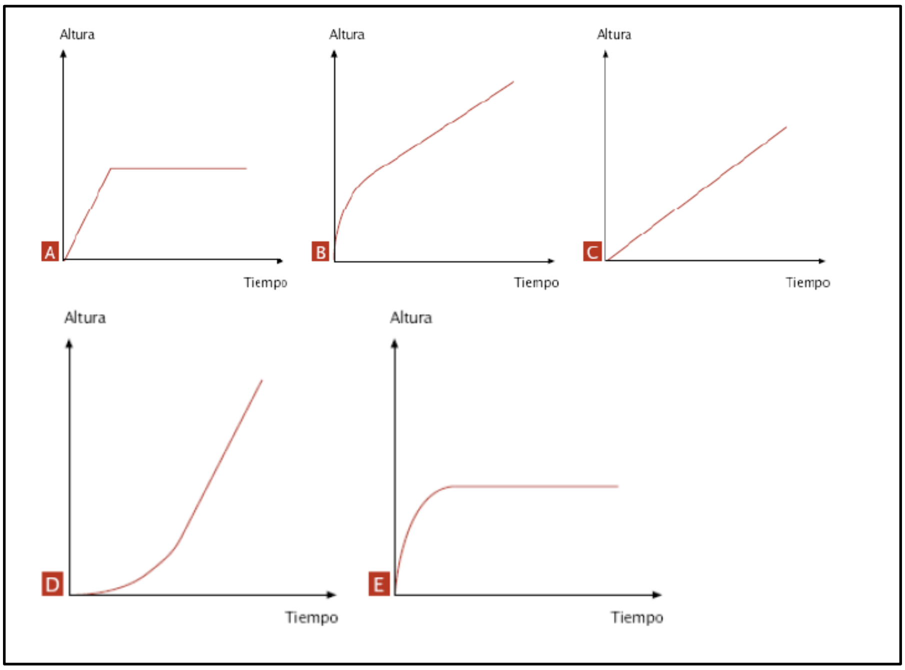


Ejercicio 31: Un depósito de agua tiene la forma y dimensiones que se muestran en el dibujo

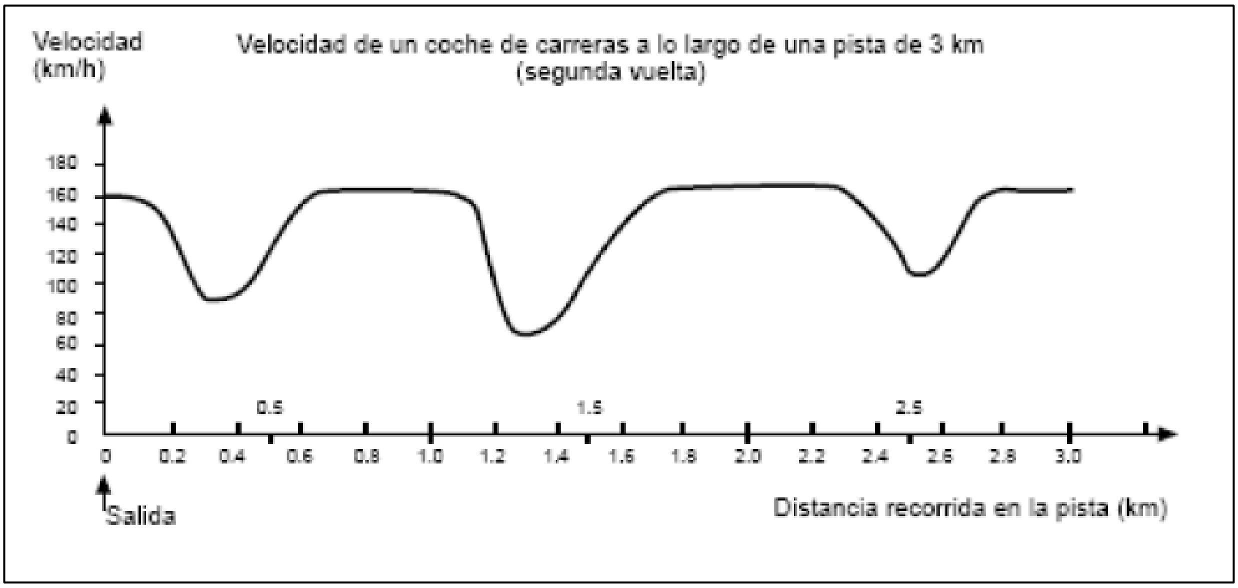


Inicialmente el depósito está vacío. Después se llena con agua a razón de un litro por segundo.

¿Cuál de los gráficos siguientes muestra la altura que alcanza la superficie del agua en la cisterna en función del tiempo?



Ejercicio 32: Este gráfico muestra cómo varía la velocidad de un coche de carreras a lo largo de una pista llana de 3 km durante su segunda vuelta.



i) ¿Cuál es la distancia aproximada desde la línea de salida hasta el comienzo del tramo recto más largo que hay en la pista?

A) 0,5 km.
B) 1,5 km.
C) 2,3 km.
D) 2,6 km.

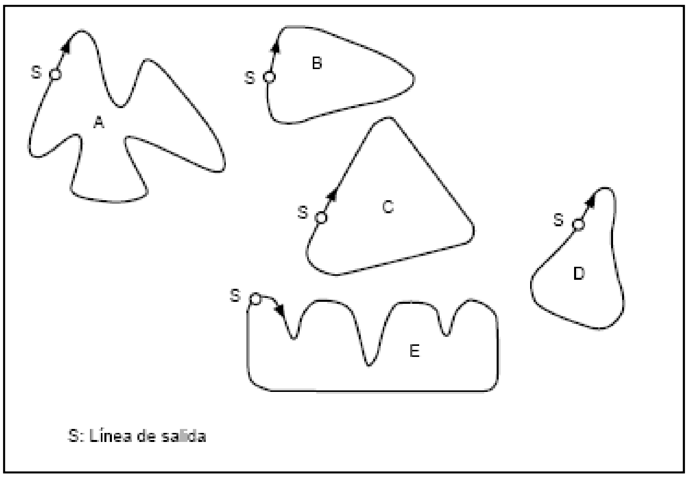
ii) ¿Dónde alcanzó el coche la velocidad más baja en la segunda vuelta?

A) En la línea de salida.
B) Aproximadamente en el km 0,8.
C) Aproximadamente en el km 1,3.
D) En el punto medio de la pista.

iii) ¿Qué se puede afirmar sobre la velocidad del coche entre el km 2,6 y el 2,8?

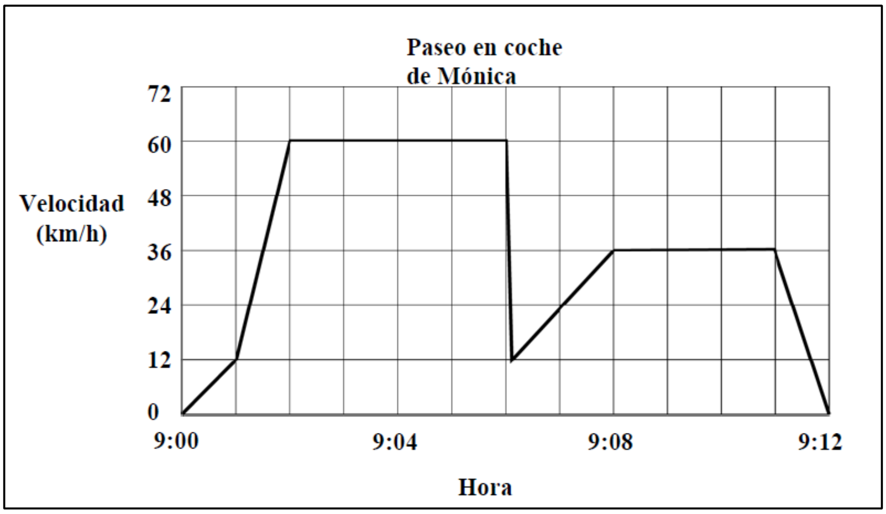
A) La velocidad del coche permanece constante.
B) La velocidad del coche aumenta.
C) La velocidad del coche disminuye.
D) La velocidad del coche no se puede hallar basándose en este gráfico.

iv) Aquí están dibujadas cinco pistas:
¿En cuál de ellas se condujo el coche para producir el gráfico de velocidad mostrado anteriormente?



Ejercicio 33: Mónica fue a dar un paseo con su coche. Durante el paseo, un gato se cruzó delante del coche. Mónica frenó de golpe y esquivó al gato.
Ligeramente afectada, Mónica decidió volver a casa.

El gráfico siguiente es un registro simplificado de la velocidad del coche durante el paseo.



i) ¿Cuál fue la velocidad máxima del coche durante el paseo?
Velocidad máxima: .... km/h.

ii) ¿Qué hora era cuando Mónica frenó de golpe para evitar atropellar al gato?
Respuesta: ....

iii) ¿El camino de vuelta a casa de Mónica fue más corto que la distancia recorrida desde su casa al lugar donde ocurrió el incidente con el gato? Da una explicación que fundamente tu respuesta utilizando la información que proporciona el gráfico.
....
....
....
....

FUNCIÓN LINEAL

Muchas situaciones de la realidad tienen un comportamiento que permite describirlas utilizando una función lineal como modelo. Ejemplos de estas situaciones son:

- ✓ distancia recorrida por un móvil sobre un camino recto con velocidad constante en función del tiempo empleado (en física este movimiento se denomina rectilíneo uniforme);
- ✓ la longitud de una circunferencia en función del radio;
- ✓ la relación entre la temperatura expresada en grados centígrados (ºC) y la temperatura expresada en grados Fahrenheit (ºF);
- ✓ costo total de la factura del agua en función de los litros consumidos por mes en cada domicilio.

Analizaremos las características de las funciones lineales y distintas formas de representarlas: tablas de valores, gráficos, fórmulas, etc.
Además, vincularemos problemas geométricos, tales como hallar la intersección de dos rectas a través de la resolución de sistemas de ecuaciones y reconocer rectas paralelas y perpendiculares a través de sus ecuaciones.
Antes de comenzar con el desarrollo teórico del tema, presentaremos tres situaciones problemáticas.
Le sugerimos que se reúna en un grupo pequeño (o con su compañero de banco) y que antes de comenzar a intercambiar ideas, **lea con detenimiento** cada problema y tome unos minutos para **pensar individualmente** su resolución. Luego expongan dentro del grupo lo que analizaron y evalúen cual es el procedimiento más eficaz en cada caso.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

En un depósito hay 200 litros de agua, suponiendo que al quitar el tapón éste se vacía a una **velocidad constante** de 40 litros por minuto. Responder:

a) ¿Cuántos litros de agua queda en depósito luego de 1 minuto de haber quitado el tapón? ¿y a los 2 minutos? ¿Y a los 3,5?
b) ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el depósito?
c) Escribir una expresión que relacione la cantidad $\boldsymbol{C}$ de agua que queda en el depósito en función del tiempo transcurrido $\boldsymbol{t}$.
d) Representar en un sistema de ejes cartesianos el conjunto de puntos obtenidos en los incisos anteriores.
e) ¿Qué disposición tienen los puntos graficados? ¿Tiene sentido unir dichos puntos? ¿Por qué?
f) ¿Para qué valores de $\boldsymbol{t}$ tiene sentido el problema? Es decir, ¿cuál es el conjunto Dominio de la función?

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2

En los supermercados se disponen de balanzas en las cuales se puede teclear el precio por kilogramo de la verdura que se pesa. Estas balanzas emiten un ticket donde se indica el precio total a pagar, correspondiente a la cantidad de verdura pesada. En la siguiente tabla se presentan distintas cantidades pesadas de tomate y el respectivo precio total para cada una de ellas:

Peso (en kg)	**Costo ($)**
0,5	15
1	30
2,5	75
3	90
4,75	142,5

A partir de la información presentada en la tabla responder:

a) Indicar las variables que se relacionan.
b) Escribir una expresión que relacione el costo $\boldsymbol{P}$ en función del peso del tomate $\boldsymbol{x}$.
c) ¿Qué beneficio tiene obtener una expresión que relaciones el costo $\boldsymbol{P}$ y el peso del tomate $\boldsymbol{x}$**?**
d) Representar en un sistema de ejes cartesianos las parejas de valores que relaciona la tabla.
e) ¿Se pueden unir los puntos representados en el inciso d)? ¿por qué?
f) ¿Para qué valores de $\boldsymbol{x}$ tiene sentido el problema?

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 3

Ana sacó 6 fotocopias de los apuntes teóricos de la cátedra Algebra y Geometría. Pagó por ellas $ 9. Al día siguiente sacó 10 fotocopias más. Responder:

a) Indicar las variables que se relacionan.
b) ¿Cuánto cuesta 1 fotocopia? ¿y 3? ¿Cuánto deberá pagar exactamente por las 10 fotocopias?
c) ¿Cuántas fotocopias puede sacar con $18?
d) Escribir una expresión que relacione el costo $\boldsymbol{P}$ en función de la cantidad $\boldsymbol{x}$ de fotocopias.
g) Representar en un sistema de ejes cartesianos los puntos obtenidos en los incisos anteriores.
e) ¿Se pueden unir los puntos representados en el inciso g)? ¿por qué?
f) ¿Para qué valores de $\boldsymbol{x}$ tiene sentido el problema?

Respuesta:

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

Antes de comenzar a resolver el ejercicio determinemos quienes son las variables que se relacionan. Éstas son el tiempo en minutos y la cantidad de agua que queda en el depósito expresada en litros.
Es claro que el tiempo es la variable independiente y la cantidad de agua en el depósito es la variable dependiente.
Para responder el inciso a) realicemos el siguiente análisis:
El depósito contiene inicialmente 200 litros de agua, al quitar el tapón comienza a vaciarse a una razón constante de 40 litros por minuto, entonces,

- En **1** minuto el depósito perdió 40. **1** litros, por lo tanto quedan $200 - 40.\mathbf{1} = \mathbf{160}$ litros de agua
- A los **2** minutos el depósito perdió 40. **2** litros, por lo tanto quedan $200 - 40.\mathbf{2} = \mathbf{120}$ litros de agua
- De manera análoga, decimos que a los **3,5** minutos el depósito perdió 40. **3,5** y quedan en la pileta $200 - 40.\mathbf{3.5} = \mathbf{60}$ litros

Esta información la podemos disponer en una **tabla de valores** para poder visualizarla de una mejor manera. Comenzamos escribiendo en la primear fila los nombres de las variables que intervienen, primero la variable independiente y luego la variable dependiente: tiempo (minutos) y cantidad de agua en el depósito (litros). Como la cantidad inicial de agua en el depósito es de 200 litros, lo registramos escribiendo **0** en la primera columna y **200** en la segunda columna. Dejamos filas vacías para que complete la tabla con otros pares de valores que desee.

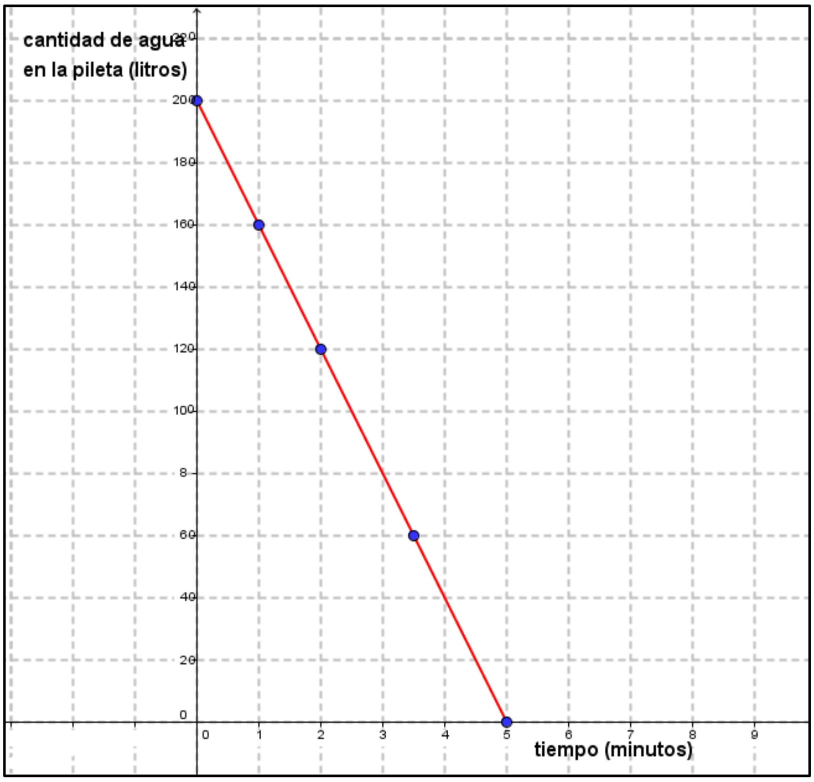
Tiempo(minutos)	**Cantidad de agua en el depósito (litros)**
0	**200**
1	**160**
2	**120**
3.5	**60**

Una manera de determinar cuánto tiempo tardará en vaciarse el depósito es hacerlo por tanteo, es decir, probar con distintos valores hasta que la resta entre 200 y un múltiplo de 40 sea igual a cero. Ese valor es 5. Por lo tanto el depósito tardó 5 minutos en vaciarse.
Luego de lo analizado, vimos que se puede calcular la cantidad de agua que pierde el depósito multiplicando por 40 los minutos transcurridos después de retirar el tapón. Y para determinar la cantidad de agua que queda en la pileta se resta a los 200 litros la cantidad antes calculada.
Si llamamos $\boldsymbol{t}$ al tiempo transcurrido después de retirar el tapón y ***C*** a la cantidad de agua que queda en el depósito, una expresión que relaciona ambas variables es:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{t}) = 200 - 40.\boldsymbol{t}$$

Como la variable independiente $\boldsymbol{t}$ representa tiempo, éste no puede ser negativo. Además el problema tiene sentido hasta que la pileta queda sin agua, y esto sucede luego de 5 minutos después de haber sacado el tapón. Por lo tanto el problema tiene sentido para $t \in [0; 5]$.

Graficamos en un sistema de ejes cartesianos las distintas parejas de puntos que se pueden leer de la tabla de valores: $(0\,;200)$; $(1\,;160)$; $(2\,;120)$; $(3{,}5\,;\,60)$
Observamos que los puntos están alineados y como el tiempo es continuo tiene sentido unir los puntos a través de una porción de recta.



Respuesta:

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2

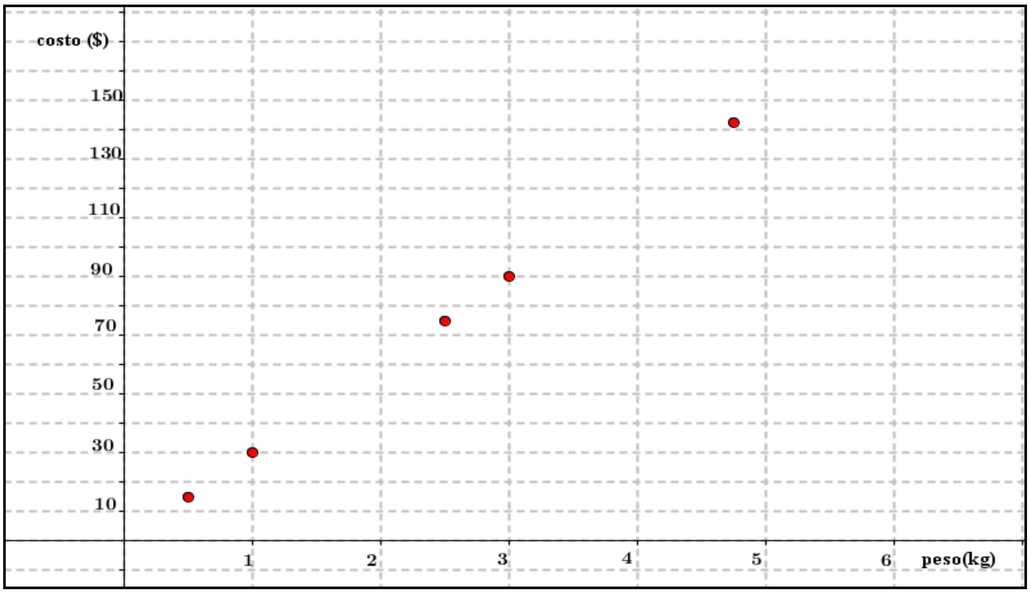
Las magnitudes (variables) que se relacionan son: el peso del tomate en kilogramos y el costo en pesos. Es claro que el costo depende de la cantidad de kg. de tomate que se compre. Llamemos ***x*** *a la cantidad de kilo*gramos de tomate y $P(x)$ al costo de adquirir ***x*** *kilo*gramos de tomate.
Observemos que: a igual diferencia de peso (sobre el eje *x*), se obtiene igual diferencia de precio a pagar (sobre el eje *y*), es decir que el cambio en el costo del tomate es proporcional a la cantidad de kg. de tomate que se compra. Ésta “variación constante” se puede expresar con razones o cocientes entre las respectivas parejas de valores, pues las siguientes divisiones dan siempre el mismo resultado:

$$\frac{15}{0{,}5} = \frac{30}{1} = \frac{75}{2{,}5} = \frac{90}{3} = \frac{142{,}5}{4{,}75} = 30$$

Ésta razón se llama **constante de proporcionalidad o proporción.**
Luego, la expresión que relaciona el costo $\boldsymbol{P}$ en función del peso del tomate $\boldsymbol{x}$ es:

$$P(x) = 30.x$$

Estos registros se pueden representar gráficamente de la siguiente manera:



Es evidente que si no compramos tomates, no debemos pagar nada. Es decir, que si $x = 0$,

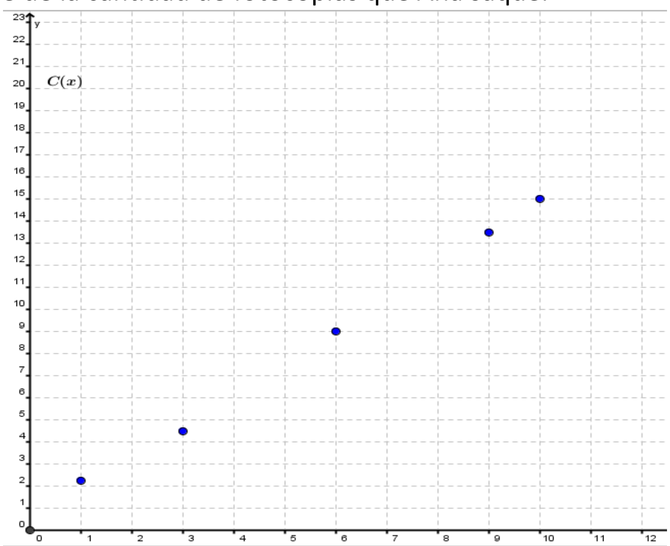
$$P(0) = 30.0$$
$$P(0) = 0$$

Por lo tanto el punto $(0, 0)$ forma parte de la representación gráfica de esta función. Ubicar este punto en el gráfico anterior.
Los puntos representados están alineados y como la variable independiente representa peso se pueden unir mediante una **línea recta.** Trace la semirrecta que une los puntos (¡cuidado que el peso no puede ser negativo!)

Respuesta:

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 3

En esta situación, las variables que se relacionan son: la cantidad de fotocopias y el costo en pesos. Es claro que el costo depende de la cantidad de fotocopias que Ana saque.



Para determinar el costo de una fotocopia resolvemos la división $\$9 : 6 = \$1{,}5$. A partir de esto es sencillo obtener el costo que debemos pagar por 3 y 10 fotocopias. El costo será $ 4,5 y $ 15 respectivamente.
Con $ 18 podemos sacar 12 fotocopias.

Llamemos ***x** a la cantidad de fotocopias* y $C(x)$ al costo de adquirir ***x** fotocopias*, una expresión que relaciona ambas variables es:

$$\boldsymbol{C(x)} = 1{,}5.\boldsymbol{x}$$

En este caso no tiene sentido unir los puntos ya que la variable cantidad de fotocopias no es continua, es decir no puedo sacar 2 ,5 fotocopias. Por lo tanto la representación gráfica de esta funcion es una sucesión de puntos alineados. El problema tiene sentido para los números naturales.

❖ FUNCIÓN LINEAL

Llamamos FUNCIÓN LINEAL a toda función $f : R \to R$ cuya ecuación es de la forma:

Notar que, escribiremos en forma indistinta la función lineal utilizando el nombre de la misma ***f***, o bien indicando solamente el nombre de la variable dependiente ***y***.

$$\boldsymbol{f\,(x) = m.x + b} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{y = m.x + b}$$

donde $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$ son números reales, llamados parámetros de la función lineal.

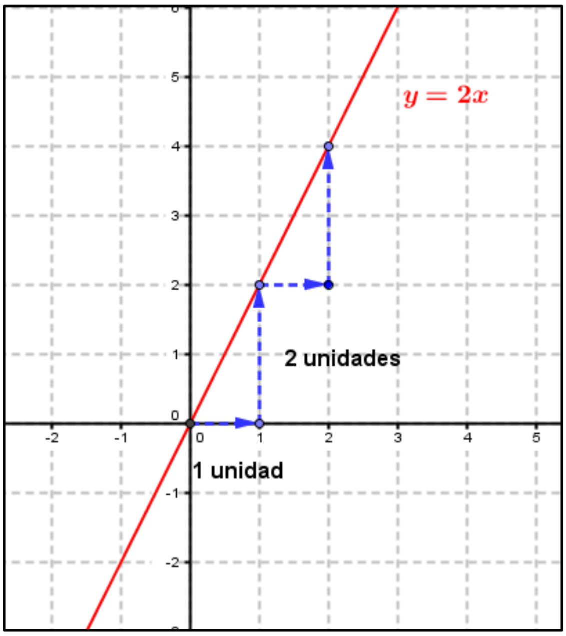
$$y = \boldsymbol{m}\,x + \boldsymbol{b}$$

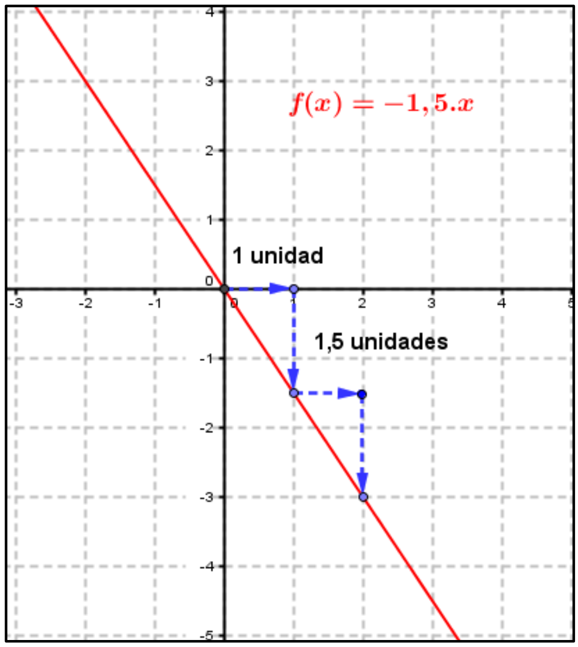
PENDIENTE **ORDENADA AL ORIGEN**

El parámetro $\boldsymbol{m}$, de la función $f\,(x) = m.x + b$ se llama ***pendiente*** de la recta e indica la inclinación de ésta y el parámetro $\boldsymbol{b}$, se llama ***ordenada al origen*** e indica el punto donde la recta interseca al eje de las ordenadas.

- ✓ El dominio de la función lineal f es el conjunto R de los números reales.
- ✓ La representación gráfica de una función lineal con dominio en **R** es siempre una recta no vertical, por esta razón con conocer solo dos puntos de la función alcanza para poder graficarla.
  Si la variable independiente tiene alguna restricción, la representación gráfica puede resultar una semirrecta, un segmento o una sucesión de puntos alineados. En la situación problemática 1, debido a las restricciones antes mencionadas en su resolución, la representación gráfica es un segmento. En la situación problemática 2 es una semirrecta y en la situación problemática 3 es una sucesión puntos aislados.
- ✓ Un punto $P = (\boldsymbol{x_0}\,;\,\boldsymbol{y_0})$ pertenece a la recta que representa a una función lineal de ecuación $y = m.x + b$ si y solo si sus coordenadas verifican: $\boldsymbol{y_0} = m.\boldsymbol{x_0} + b$. ***(Principio de la geometría analítica)***
- ✓ Si una función lineal de la forma $y = m.x + b$ tiene ordenada al origen igual a cero $(b = 0)$ es además una **función de proporcionalidad directa**. Una función es de proporcionalidad directa cuando su fórmula es del tipo $\boldsymbol{y = m.x}$ donde la pendiente $\boldsymbol{m}$ recibe el nombre **de constante de proporción**.

Su representación gráfica es **una recta que pasa por el origen de coordenadas** $(\mathbf{0};\mathbf{0})$. Un ejemplo de este tipo de función corresponde a la situación problemática 2. Otros ejemplos son las funciones de fórmula: $y = 2.x$; $f(x) = -1{,}5.x$.
La representación gráfica correspondiente a cada una de ellas es:





Observamos que en las gráficas que representan funciones de proporcionalidad directa todos los puntos de la recta están alineados con el punto $(\mathbf{0};\mathbf{0})$.

Toda función lineal puede interpretarse como la suma de una función de proporcionalidad directa y una constante.

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN LINEAL: ¿Qué indica cada uno de ellos?

❖ ORDENADA AL ORIGEN

Recordando lo antes definido, el parámetro $\boldsymbol{b}$ en la expresión de la función lineal $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{m}.\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ se llama ordenada al origen. Gráficamente, es la ordenada del punto donde la recta intercepta al eje de las ordenadas (eje y). Es el punto de coordenadas $(\mathbf{0};\ \boldsymbol{b})$.

Analíticamente, es el valor que toma la función $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x})$ cuando $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{f}\ (\mathbf{0}) = \boldsymbol{m}.\mathbf{0} + \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{b}.$$

Es decir que el valor de $\boldsymbol{b}$ corresponde a la imagen de $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

❖ PENDIENTE DE UNA RECTA

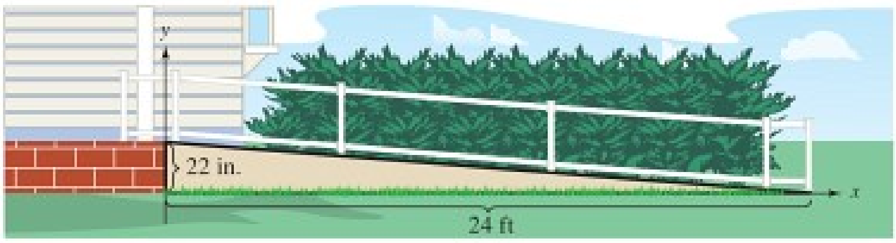
Según lo antes mencionado, la pendiente de una recta indica la inclinación de la misma. Pero, ¿Qué implica esto? ¿Por qué es importante conocer la pendiente de una recta? ¿Se aplica en el mundo real? Aclararemos este concepto.

La siguiente foto muestra a una persona que se dispone a construir un piso de concreto.

Lo primero que debe hacer el albañil es lograr que la superficie esté completamente horizontal luego, empieza a colocar el hormigón y finalmente si es necesario un revestimiento.

Cuando se construyen los techos de las casas es muy importante tener en cuenta la inclinación de éstos pues la inclinación permite lograr que el agua circule y escurra hacia la parte más baja y evita que el agua quede atrapada y ocasione con el tiempo filtraciones que arruinan la edificación.
Por ello las construcciones de los techos de las casa deben tener al menos una mínima inclinación como se observa en las siguientes imágenes.

Otras situaciones donde es importante tener en cuenta la pendiente o inclinación son en la construcción de rutas, rampas o juegos infantiles como se observa en las imágenes.



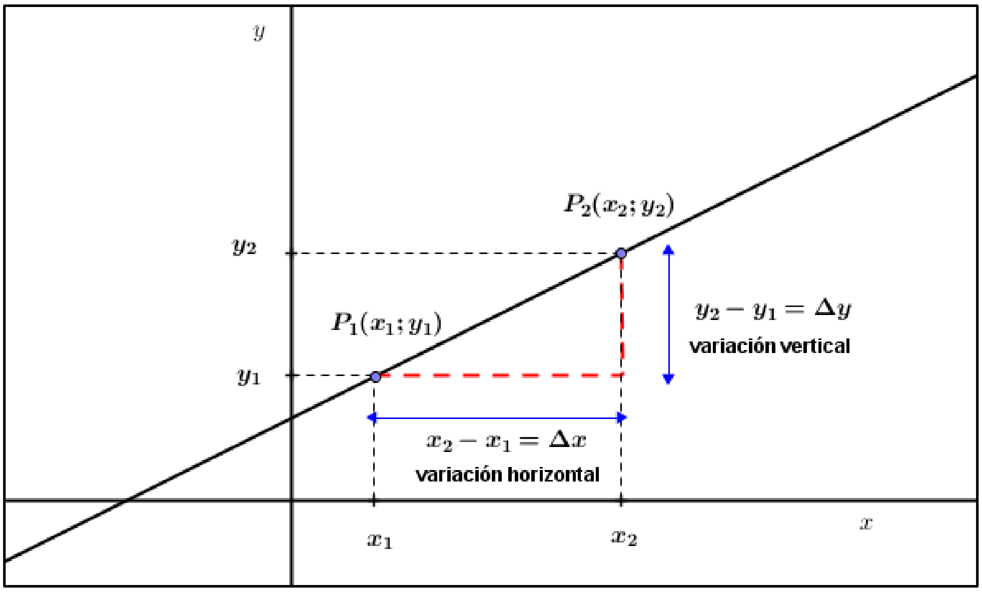
Ahora la pregunta es: ¿cómo calculamos y diseñamos la pendiente de un techo o de un piso?
Para ello necesitamos un modo de medir la "inclinación" de una recta.
La pendiente de una recta es el cociente entre la **variación vertical** y la **variación horizontal**.

$$\boldsymbol{pendiente\ de\ la\ recta = \frac{variación\ vertical}{variación\ horizontal}}$$

Si de una función lineal se sabe que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces su representación gráfica contendrá a los puntos $(x_1\ ;\ y_1)$ y $(x_2\ ;\ y_2)$.

Consideremos dos puntos cualquiera $P_1 = (x_1\ ;\ y_1)\ y\ P_2 = (x_2\ ;\ y_2)$ que pertenecen a una recta.

A la variación que corresponde a los valores de ***y*** se la simboliza con Δy ("se lee delta ***y***") y a la variación que corresponde a los valores de ***x*** se la simboliza con Δx ("se lee delta ***x***")



<u>DEFINICIÓN DE PENDIENTE</u>

La pendiente $\boldsymbol{m}$ de una recta no vertical que pasa por los puntos $P_1 = (x_1\ ;\ y_1)\ \ y\ \ P_2 = (x_2\ ;\ y_2)$ es:

$$\boxed{\boldsymbol{m} = \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1}}{\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}} \qquad siempre\ que\ \ x_1 \neq x_2} \qquad \mathbf{1}$$

<u>Ejemplo 1</u>

Supongamos que necesitamos averiguar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P\ (2; 1)\ \ y\ \ Q(5; 3)$. Una forma de determinarla es utilizar la fórmula **1.**

Antes de aplicar la fórmula que define a la pendiente, es conveniente, para evitar errores, nombrar las coordenadas de los puntos con los de la fórmula,

$$P\ (2; 1) \qquad y \qquad Q\ (5; 3)$$

$$\boldsymbol{x_1} \qquad \boldsymbol{y_1} \qquad \boldsymbol{x_2} \qquad \boldsymbol{y_2}$$

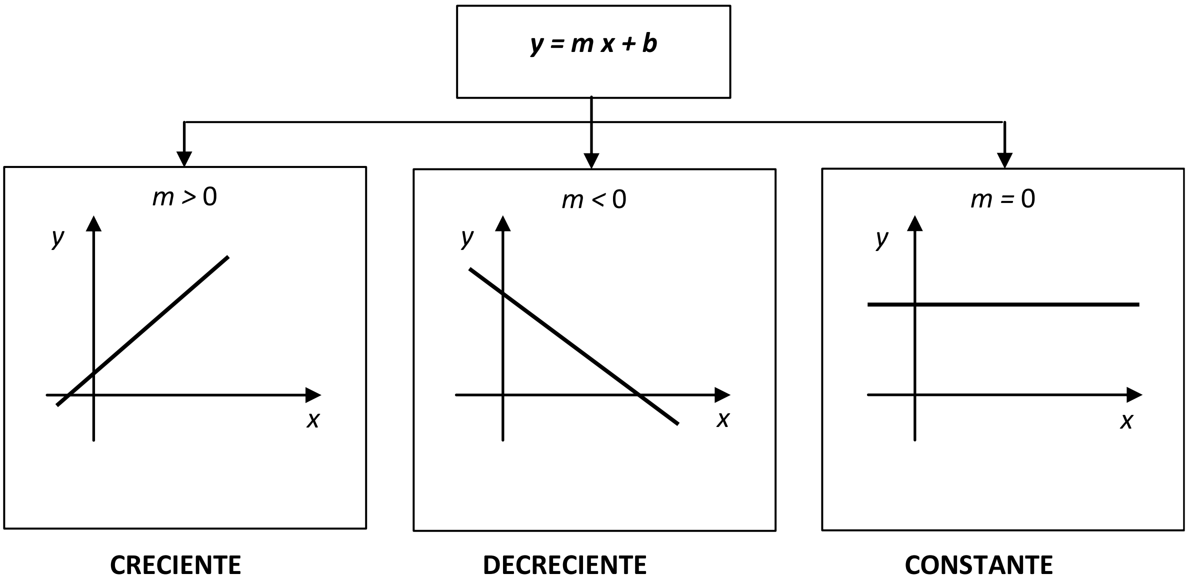
Ahora sustituimos en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{5 - 2} = \frac{2}{3}$$

ACLARACIÓN

No importa a cuál de los dos puntos nombramos $P_1 = (x_1\ ;\ y_1)$ y a cuál nombramos $P_2 = (x_2\ ;\ y_2)$, el valor de la pendiente de la recta que pasa por esos puntos es la misma.

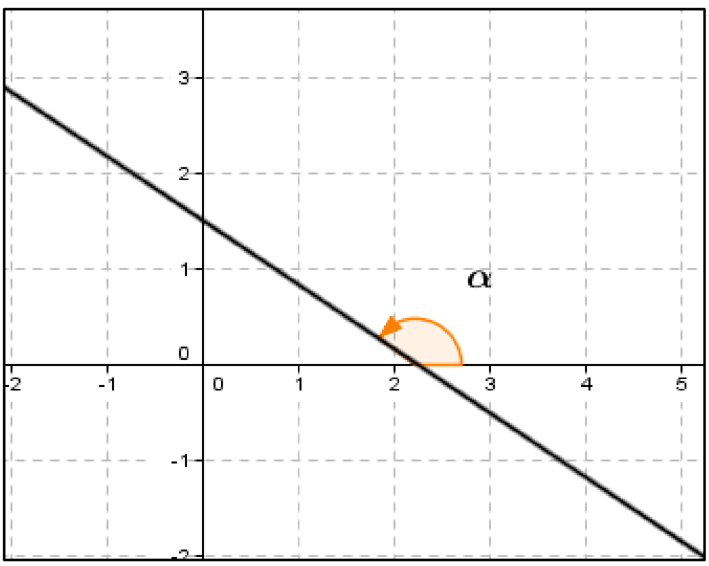
- La inclinación de cada recta está directamente relacionada con el signo de su pendiente. En el siguiente cuadro se clasifican las funciones lineales según el valor de la pendiente:

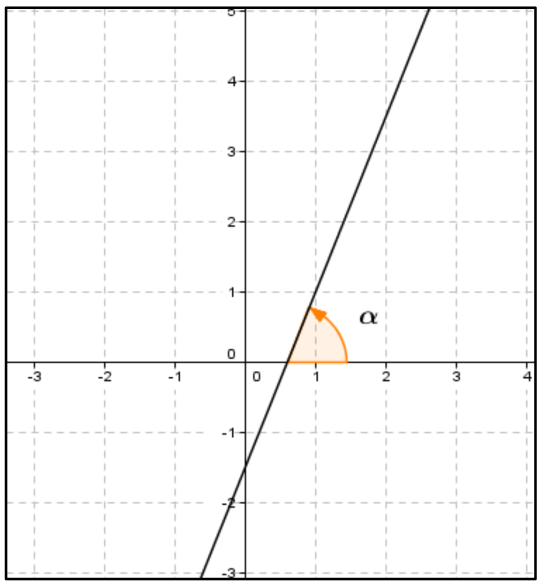


- El concepto de pendiente de una recta a su vez está asociado con otro elemento importante de la recta, estamos refiriéndonos a su **ángulo de inclinación**.

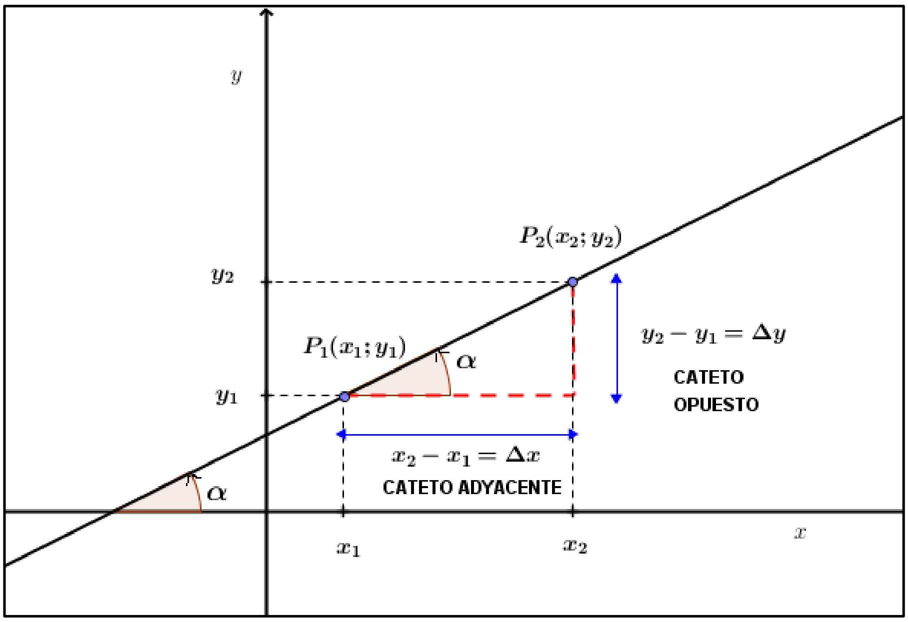
Llamaremos **ángulo de inclinación de una recta** al ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ que queda determinado entre la recta y el eje positivo de las x. Éste ángulo se mide en sentido contrario a las agujas del reloj (sentido anti horario), partir de la dirección positiva del eje *x*.

Es evidente, que por nuestras consideraciones el valor del ángulo de inclinación de una recta estará comprendido entre 0° y 180°. En la siguiente figura, se señalan los ángulos de inclinación para cada una de las rectas graficadas:





Una vez hechas estas argumentaciones, estamos listos para definir la pendiente de una recta en términos de su ángulo de inclinación. Observemos el siguiente gráfico:



Podemos ver que en el triángulo rectángulo que queda formado, la hipotenusa es un segmento contenido en la recta en cuestión, el cateto opuesto al ángulo α mide $y_2 - y_1$ y el cateto adyacente correspondiente mide $x_2 - x_1$.

Recordemos que la razón trigonométrica que relaciona cateto opuesto y cateto adyacente es la **TANGENTE**,

$$tan\ \alpha = \frac{CAT.OPUESTO}{CAT.ADYACENTE}$$

Reemplazando los catetos por sus medidas correspondientes obtenemos:

$$tan\ \alpha = \frac{CAT.OPUESTO}{CAT.ADYACENTE} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo definido antes, la pendiente m de la recta es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo tanto la **pendiente de una recta** m es igual a la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación α. Simbólicamente se expresa así:

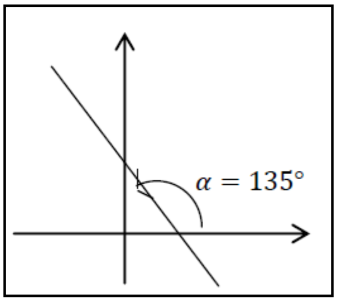
$$\boxed{\boldsymbol{m = tan\alpha}}$$

Ejemplo 3

Hallar la pendiente de una recta sabiendo que el ángulo de inclinación es igual a 135°.

Respuesta:

Si $\alpha = 135°$ entonces reemplazando en la fórmula anterior tenemos que:

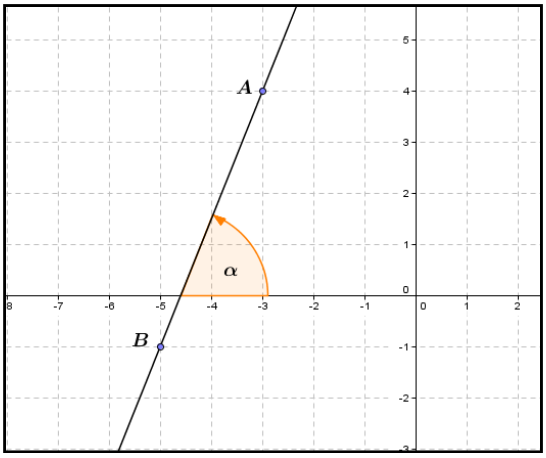


$$m = tan135°$$
$$m = -1$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta es $m = -1$

Ejemplo 4.
Encontrar la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta que pasa por los puntos $A(-3;4)\ y\ B(-5;-1)$.

Respuesta
Antes de comenzar con el trabajo algebraico, representamos gráficamente los puntos A y B y trazamos la recta que los contiene. Marcamos el ángulo de inclinación y lo llamamos α.



Observando el gráfico podemos anticipar que el ángulo de inclinación debe ser un ángulo agudo. Indicamos primero las coordenadas de los puntos, para sustituirlos correctamente en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Nombramos las coordenadas de los puntos con los de la fórmula,

$$A\,(-3;4) \quad y \quad B\,(-5;-1)$$

$$x_1 \qquad y_1 \qquad x_2 \qquad y_2$$

Reemplazamos en la fórmula los valores correspondientes, y tenemos que la pendiente es igual a:

$$m = \frac{-1-4}{-5-(-3)} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Conociendo el valor de la pendiente, procedemos de la siguiente manera:

- ✓ Sustituimos el valor de la pendiente en la fórmula,

$$\boldsymbol{tan\alpha = m}$$

De esta manera, obtenemos la ecuación $tan\alpha = \frac{5}{2}$.

- ✓ Resolvemos la ecuación despejando α ,

$$\widehat{\alpha} = arctan\frac{5}{2}.$$

Con ayuda de la calculadora científica tenemos que,

$$\widehat{\alpha} = 68°11`55``$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Una función lineal se puede representar teniendo en cuenta distintos procedimientos. A continuación detallaremos algunos de ellos.

❖ Teniendo en cuenta la pendiente y la ordenada al origen.

Gráficamente la pendiente $\boldsymbol{m}$ indica la cantidad de unidades que se desplaza la coordenada $\boldsymbol{y}$ (hacia arriba o hacia abajo) por cada unidad que se desplaza la coordenada $\boldsymbol{x}$ hacia la derecha. Teniendo en cuenta esto, podemos representar una función lineal considerando la pendiente y la ordenada al origen. Aclaremos esto analizando el siguiente ejemplo.

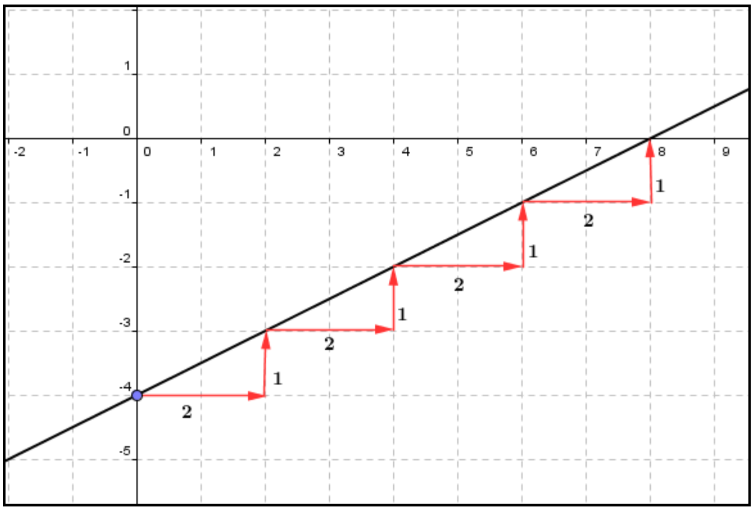
Ejemplo 2

Representar gráficamente las siguientes funciones lineales teniendo en cuenta **pendiente** y **ordenada al origen.**

$$a)\quad f(x)=\frac{1}{2}x-4 \qquad b)\quad y=2 \qquad c)\quad g(x)=-3x+2$$

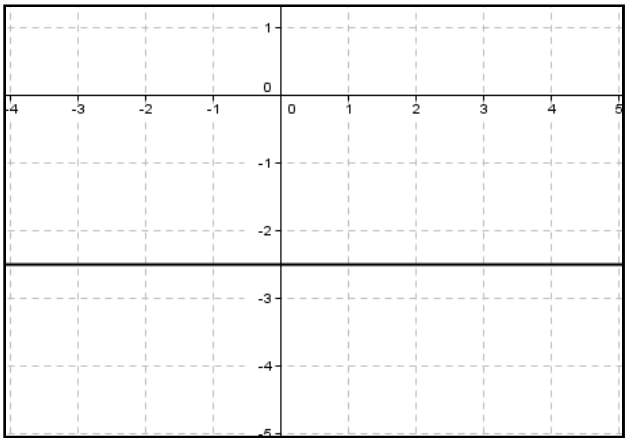
Respuestas:

a) La pendiente de la función $f(x)=\frac{1}{2}x-4$ es $m=\frac{1}{2}$ y la ordenada al origen es $b=-4$. Dibujamos el punto que representa la odenada al origen: $(0;4)$. A partir de este punto "nos movemos" al ritmo de la pendiente. Es decir, "cada dos unidades que aumenta la abscisa $\boldsymbol{x}$, la ordenada $\boldsymbol{y}$ sube 1 unidad". De esta manera se obtienen otros puntos de la recta.

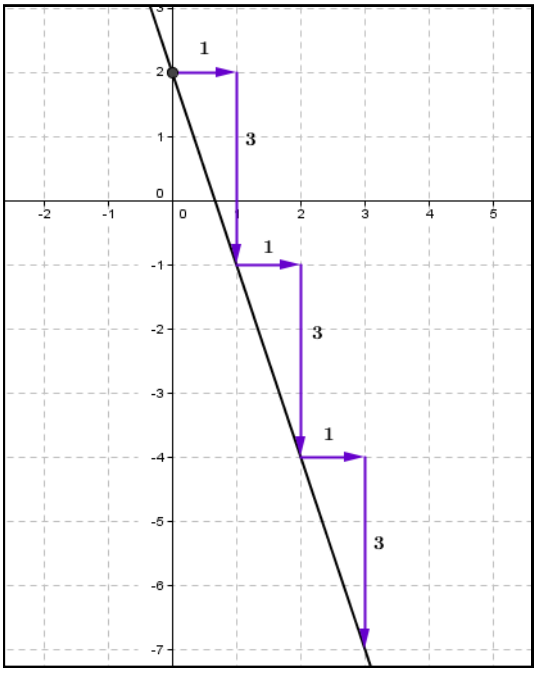


b) En este caso donde la función está dada por la ecuación $y=2{,}5$, la pendiente es igual a cero y la ordenada al origen es igual a 2,5.

Observamos que cuando la variable $\boldsymbol{x}$ aumenta una unidad, la variable $\boldsymbol{y}$ no aumenta ni disminuye, se mantiene constante. Por lo tanto, la representación gráfica de esta función es una recta horizontal paralela al eje x.



c) La función lineal de ecuación $g(x) = -3x + 2$ tiene como pendiente a $m = -3$ y como ordenada al origen a $b = 2$. Repetimos el procedimiento antes descripto en el inciso a)



Aquí vemos que por cada unidad que aumenta $\boldsymbol{x}$,

la variable dependiente $\boldsymbol{y}$ <u>disminuye</u> tres unidades

❖ Otra forma de representar gráficamente una función lineal es teniendo en cuenta **la raíz** y la **ordenada al origen.**

Para ello solo debemos calcular la raíz, es decir el punto de intersección de la recta con el eje de abscisa cuyas coordenadas son $(x; 0)$. Esto implica resolver la ecuación de 1º grado $f(x) = 0$ o bien

$$m.x + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{m}$$

Luego el punto de corte con el eje x es: $\left(\frac{-b}{m} ; 0\right)$

El valor de la ordenada al origen lo leemos de la fórmula de la función (cuando ésta está en forma explícita). Como para representar gráficamente una recta basta conocer dos puntos de ella, resta dibujar los puntos de corte con el eje $\boldsymbol{x}$ y el eje $\boldsymbol{y}$ respectivamente y trazar la recta que los contiene.

Ejemplo 5

Representar gráficamente la función lineal $g(x) = \frac{5}{6}.x + \frac{5}{2}$ teniendo en cuenta **la raíz** y la **ordenada al origen.**

Respuesta

Para calcular la raíz planteamos la ecuación lineal $\frac{5}{6}.x + \frac{5}{2} = 0$. Aplicando las propiedades pertinentes de las operaciones, despejamos x:

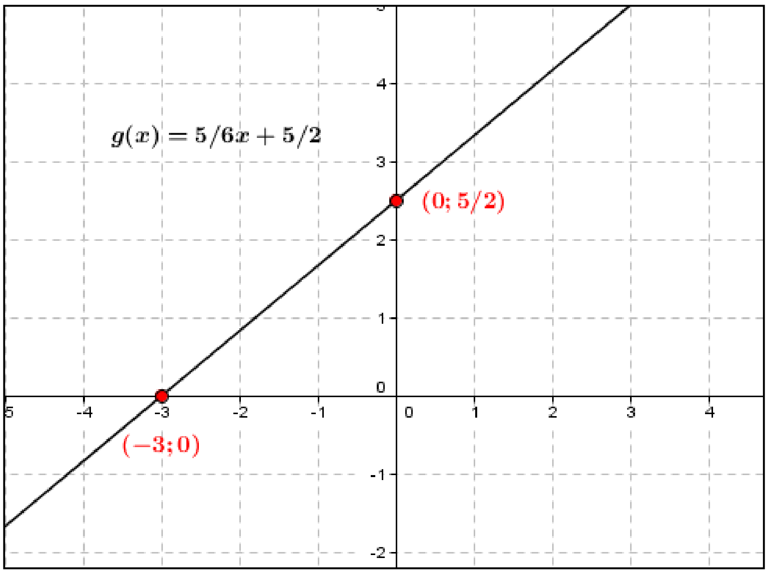
$$\frac{5}{6}.x = -\frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{5}{2} : \frac{5}{6}$$

$$x = -3$$

Luego el punto de corte con el eje x es : $(-3; 0)$.

Observando la expresión de la función tenemos que la ordenada el origen es $\frac{5}{2}$, por lo tanto el punto de corte con el eje y es: $\left(0; \frac{5}{2}\right)$. Marcamos estos dos puntos en un sistema de ejes cartesianos y luego trazamos la recta que los contiene.



ACTIVIDADES

Ejercicio 1:

i. Completar la siguiente tabla:

Inciso	Función expresada en lenguaje coloquial	Función expresada en lenguaje algebraico
a	*La función que a cada número le asigna su doble*	
b	*La función que a cada número real le asigna la suma entre el triple de su cuadrado y cinco.*	
c		$y = 2x - 3{,}5$
d	*La función que a cada número real distinto de cero le asigna la razón entre 7 y el número.*	
e	*La función que a cada número le asigna su opuesto*	
f		$y = \sqrt{x} + 2$
g		$y = -0{,}25x - 9$
h	*La función que expresa la distancia recorrida cada hora por un automóvil que circula a 60 km/h (en física este movimiento se llama rectilíneo uniforme)*	
i	*La función que relaciona el radio de una circunferencia y su perímetro.*	
j	*La función que relaciona el radio de una circunferencia y su área.*	

ii. Indicar cuál de las funciones anteriores corresponden a una función lineal.

iii. En los incisos ***h, i, j***, indicar cuál es la variable independiente y cuál la variable dependiente.

Ejercicio 2:

a) Considerar las siguientes funciones. Hallar la **expresión explícita** (despejar la variable y) de cada una de ellas e indicar cuál corresponde a una función lineal.

1) $y - 3 = 5.(x - 1)$ 2) $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{\frac{3}{2}} = 1$ 3) $y + \dfrac{7}{3} = 0$ 4) $y = \dfrac{2}{5}x$

5) $x.y = 2$ 6) $5y + 3x - 20 = 0$ 7) $y + 3{,}5x = 0$ 8) $y = x^2 - (x - 3)^2$

9) $\sqrt{y - 3} = x$ 10) $y = \frac{1-x}{4}$ 11) $y - x = 0$ 12) $y = x^2 - (x + 2)^2$

b) Representar solo las funciones que sean lineales del inciso anterior teniendo en cuenta la **pendiente** y la **ordenada al origen**.

Ejercicio 3:

i) Representar las siguientes funciones lineales teniendo en cuenta la **raíz** y la **ordenada al origen**.

$a)\ y-3=-2x+1$ $\qquad b)\ \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{4}=1$ $\qquad c)\quad y+3=0$ $\qquad d)\ 7y=-3x+12$

$e)\ \dfrac{x}{3{,}5}+\dfrac{y}{2}=1$ $\qquad f)\ y+2{,}5=\dfrac{x-8}{-2}$ $\qquad g)\ -6x+4y+16=0$ $\qquad \text{h)}\ y=\dfrac{2}{5}x+2$ $\qquad i)\ y=0$

ii) Completar la siguiente tabla teniendo en cuenta las expresiones de las funciones del inciso anterior:

Inciso	Expresión explícita de la función	Pendiente	Ordenada al origen	Raíz	Crecimiento
a					
b					
c					
d					
e					
f					
g					
h					
i					

Ejercicio 4:

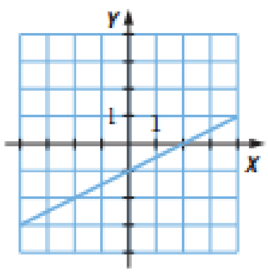
a) Indicar cuál de los siguientes puntos pertenecen al gráfico de la función $f\colon \boldsymbol{R} \to\ \boldsymbol{R},\ \ f(x)=\ 3x+2.$

$$A\ =\ (1;5) \qquad B\ =\ (2;6) \qquad C\ =\ (-2;-4) \qquad D\ =\left(\frac{1}{3};3\right) \qquad E\ =\ (\,0;3)$$

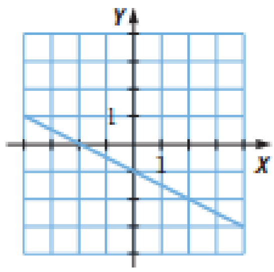
b) Representar gráficamente la función $f(x)$ y los cinco puntos dados.

Ejercicio 5: Observar los siguientes gráficos. Indicar con una **X** cuál de las siguientes rectas corresponde con la representación gráfica de la función $\boldsymbol{g(x)}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}.$ Justificar.

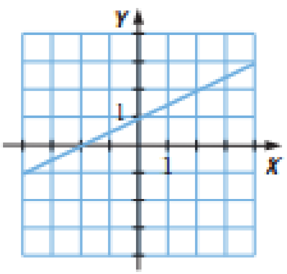
a)



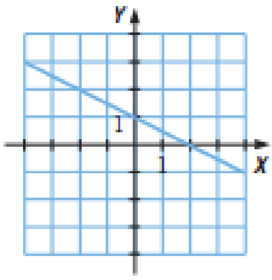
b)



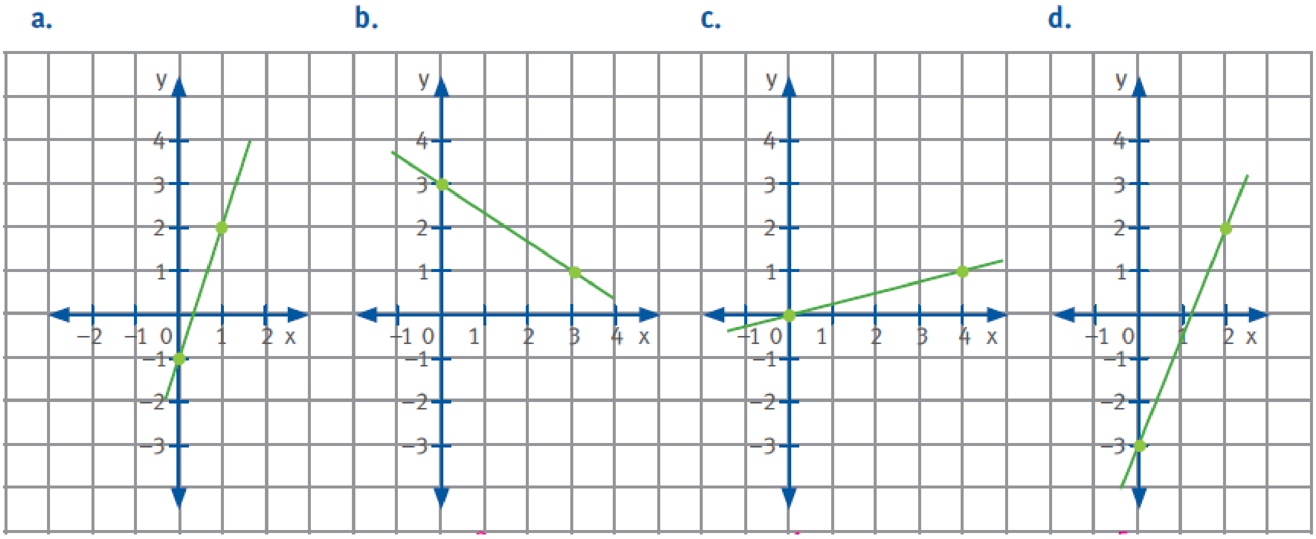
c)



d)



Ejercicio 6: Observar las siguientes rectas graficadas. Escribir la expresión de la función lineal que cada una representa. Escribir, en cada caso, los datos que utilizaste.



Ejercicio 7: Sin graficar, clasificar las siguientes funciones lineales en ***crecientes***, decrecientes o ***constante***. Explicar que tuviste que tener en cuenta para hacerlo.

$a)\ y = 12x - 3$ $\qquad b)\ y = 6$ $\qquad c)\ y = 0{,}25x - 3$ $\qquad d)\ y = x\ 12{,}5$

$e)\ y = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$ $\qquad f)\ y = -7x - 4$ $\qquad g)\ y = -1{,}5$ $\qquad h)\ y = 0{,}7x + 0{,}65$

Ejercicio 8:

a) Determinar el valor de la constante ***a*** para que el punto $(\mathbf{4}\,;\ \mathbf{-8})$ pertenezca a la recta de ecuación:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-2} = 1$$

b) Hallar el valor de ***m*** para que el punto $(\mathbf{6}\,;\ \mathbf{-1,5})$ pertenezca a la recta de ecuación $\boldsymbol{y = m.x - 3,5.}$

c) Determinar el valor de la constante ***b*** para que el punto **(-5 ; 4)** pertenezca a la recta cuya ecuación es $y = \frac{2}{5}.x + b.$

d) ¿Cuánto debe valer el número real $\boldsymbol{k}$ para que el punto $(-1\,;2)$ pertenezca a la recta de ecuación $kx + 7y - 7 = 0$? Graficar.

Ejercicio 9:

a) Hallar el ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas:

$i)\ y = x + 2{,}3$ $\qquad ii)\ 3x - y + 2 = 0$ $\qquad iii)\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ $\qquad iv)\ 2y - 3 = 0$

b) Representar gráficamente.

Ejercicio 10: Hallar la ecuación de la recta que corta al eje *x* en el punto de abscisa 3 y forma con él un ángulo de 60°.

Ejercicio 11:

Una recta pasa por $P(3\,;\ -2)$ y forma un ángulo de 45° con el semieje positivo del eje *x*. Encontrar su ecuación y representar gráficamente.

❖ MODELOS LINEALES

PROBLEMAS CON LA ELECTRICIDAD

Un electricista cobra $20 por la visita y $60 por cada hora trabajada.

a) ¿Cuáles son las variables que intervienen en ésta situación? Clasificarlas.
b) Completar la tabla.

Cantidad de horas trabajadas	Costo
0	
2	
3:30	
4	
	320
	440
8:15	

c) ¿Cuál es la fórmula que corresponde a esta situación?
d) ¿Cuánto cobrará si trabaja 8 horas y media?
e) Si cierto día cobró $290 por su trabajo, ¿cuántas trabajó?
f) Representar los datos en un sistema de ejes cartesianos.
g) ¿Es correcto unir los puntos del gráfico? ¿Por qué?

FILTRACION EN EL DIQUE FLORENTINO AMEGHINO

El Dique Florentino Ameghino es una central hidroeléctrica de Argentina, ubicada en la provincia del Chubut, a 140 km al oeste de la ciudad de Trelew. Su máxima capacidad es de 2000 hm^3 de agua. Se detectó que tiene una filtración y desde el primer día del mes pierde agua de manera **uniforme,** a razón de 18 hm^3 de litros diarios, aproximadamente.

Responder:

a) ¿Cuántos litros de agua se filtraron al finalizar la primera semana del mes? ¿Cuántos litros tiene la represa?
b) ¿Cuántos litros de agua tiene la represa el día 15 del mes? ¿Y el día 20?
c) ¿En cuánto tiempo se vaciará el dique ? (suponiendo que no recibe agua de ningún río)
d) Hallar la fórmula de la función que describe la cantidad de agua que permanece en la represa cada día.
e) Realizar un gráfico de la función.
f) ¿Para qué valores de la variable independiente no tiene sentido la función?

¿SABÍAS QUÉ?

La central hidroeléctrica del dique permitió en el pasado proteger a los pobladores del valle de los desbordes del río y las inundaciones. En la actualidad, provee energía eléctrica a las localidades de Pico Truncado, Caleta Olivia, Comodoro Rivadavia y a todo el valle inferior del Chubut. El Dique concentra a su población en una pequeña villa que, rodeada por las enormes paredes de piedra y el impresionante murallón de la represa que contiene el agua del embalse artificial, da la impresión de ciudad secreta, sumando misterio al atractivo natural y relajante del lugar. Es un espacio propicio para el desarrollo de múltiples actividades entre las que pueden enumerarse campamentismo, caminatas, escaladas, pesca y variados deportes náuticos. El Dique recibe constantemente la visita de turistas que llegan hasta él atraídos por su fama de paisaje desentonante dentro del sur de Argentina. Siguiendo el curso del río se llega hasta las minas de caolín, un mineral de color rosa pálido que se utiliza para la fabricación de cerámicos. La materia prima para la generación de energía en la central es el agua, por consiguientes la cantidad de energía a generar depende de la cantidad de agua disponible. Para dar una noción general del rendimiento de la energía eléctrica, con 1 KWh (KiloWatt hora) se puede encender 10 foquitos de 100 W por una hora. A su vez, tenemos que 1 MWh (MegaWatt hora) = 1000 KWh, y 1 GWh (GigaWatt hora) = 1000 MWh.

EL COSTO DE LA COMUNICACIÓN

Se quiere crear un servicio minitel (servicio de información electrónico) y se propone a los futuros clientes elegir tres formas de pago trimestral:

Tarifa A: pago de la suma global de $ 380.
Tarifa B: pago de $ 147 más $ 0,20 por minuto de conexión.
Tarifa C: el precio del minuto de conexión es de $0,45.

Analizar cuál es la tarifa más conveniente para el consumidor según el tiempo de comunicación. Representar en un mismo sistema de ejes cartesianos las tres tarifas del servicio minitel.

<u>¿TAXI O UBER?</u>

Una agencia de taxis y Uber trabajan con turistas europeos tienen las siguientes tarifas:

<u>TAXI:</u> cobra un costo base de 40 euros (bajada de bandera) más 12 euros por hora trabajada.
<u>UBER:</u> no cobra un monto fijo, pero cobra 20 euros por hora trabajada.

a) Escribir las fórmulas que relacionan el costo del viaje dependiendo del número de horas trabajadas por cada agencia. Llamar $f(h)$ a la fórmula que corresponde a la agencia de taxis y $g(h)$ a la de la agencia Uber.
b) Completar las tablas de valores y representar en un mismo sistema de ejes cartesianos ambas funciones.

h	$f(h)$

h	$g(h)$

c) ¿Cuánto tiene que durar el viaje para que el costo por ambas agencias sea el mismo? Justificar.
d) ¿Cuándo es más conveniente elegir la agencia de taxis? Justificar.
e) ¿Cuándo es más conveniente elegir la agencia Uber? Justificar.
f) Si un pasajero tiene que hacer un viaje cuya duración es de 4 horas ¿Qué agencia le conviene elegir? Justificar.
g) ¿Para qué valores de la variable independiente tiene sentido el problema?

<u>IMPUESTO AL VALOR AGREGADO</u>

El IVA es un impuesto que en muchos productos supone un recargo del 21%.

a) Si un fontanero hace un trabajo de reparación de \$240, ¿a cuánto ascenderá el costo del trabajo con el IVA?
b) ¿Y si la reparación costara \$50?
c) Obtener la expresión algebraica general correspondiente al precio del trabajo del fontanero y la cantidad que se paga.

❖ **<u>OBTENCIÓN DE LA FÓRMULA DE UNA FUNCIÓN LINEAL</u>**

Cuando se conoce la pendiente y la ordenada al origen de una función lineal, escribir su fórmula es inmediato. Solo basta con reemplazar los correspondientes valores de los parámetros en su respectivo lugar en la fórmula.

En el caso que estos valores no sean conocidos, la expresión de la función lineal puede obtenerse a partir de otros datos. Estudiaremos estos casos mediante el análisis de ejemplos.

- ✓ **DATOS: UN PUNTO $(x_0\,;\,y_0)$ Y LA PENDIENTE m DE LA RECTA**

Ejemplo 6

Obtener la expresión de una función lineal sabiendo que su pendiente es $\frac{1}{2}$ y contiene al punto de coordenadas $(6;-1)$.

Respuesta

Como la pendiente es igual a $\frac{1}{2}$, se reemplaza en la fórmula $f\,(x) = m.x + b$, el parámetro m por $\frac{1}{2}$. De esta manera se obtiene la expresión $f\,(x) = \frac{1}{2}.x + b$. Solo falta calcular el valor de b para conseguir la expresión de f.

Además se sabe que el punto $(6;-1)$ pertenece a la recta que representa la función buscada. Esto significa que $f(6) = -1$, es decir que, cuando $x = 6$, el valor de $y = -1$. Teniendo en cuenta esta información, se obtiene:

$$f\,(x) = 1/2.x + b$$

$$-1 = 1/2.6 + b$$

Queda planteada una ecuación de primer grado donde la incógnita es la ordenada al origen b. Despejando se tiene que $b = -4$ (verificarlo). Luego, la fórmula de la función lineal es:

$$f\,(x) = \frac{1}{2}.x - 4$$

- ✓ **DATOS: DOS PUNTOS $(x_1\,;\,y_1)$ y $(x_2\,;\,y_2)$ QUE PERTENECEN A LA RECTA**.

Ejemplo 7

Obtener la fórmula de una función lineal g, sabiendo que su gráfica contiene los puntos de coordenadas $\left(1;\frac{3}{2}\right)$ y $(-2;6)$.

Respuesta

Por lo explicado anteriormente, conocidos dos puntos de una recta, podemos determinar el valor de la pendiente $\boldsymbol{m}$ de la recta que los contiene. De ésta manera se obtiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - \frac{3}{2}}{-2 - 1} = \frac{\frac{9}{2}}{-3} = -\frac{3}{2}$$

Calculada la pendiente, solo falta obtener el valor de la ordenada al origen para determinar la fórmula de la función lineal g. Observar que estamos en las condiciones del caso anterior analizado en el ejemplo 6.

A continuación, en la fórmula explícita $g\,(x) = m.x + b$, se reemplaza el valor de $m = -\frac{3}{2}$ y las coordenadas de uno de los puntos dados (como en este caso se dispone de dos puntos dados como datos, se elige cualquiera de ellos y se reemplazan las variables x y $g(x)$ en la expresión $g(x) = -\frac{3}{2}.x + b$).

De ésta manera se obtiene la ecuación:

$$\mathbf{6} = -\frac{3}{2}.(\mathbf{-2}) + b$$

Resolviendo la ecuación de incógnita b, se obtiene:

$$6 = 3 + b$$

$$3 = b$$

Por lo tanto, la fórmula de la función lineal pedida es $g(x) = -\frac{3}{2}.x + 3$.

Los procedimientos de resolución analizados en los ejemplos 6 y 7 pueden resolverse de manera mecanizada aplicando dos fórmulas:

- Cuando los datos proporcionados por el problema son la ***pendiente*** $\boldsymbol{m}$ ***y un punto*** $(\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{y_1})$ perteneciente a *la recta* podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m.(x - x_1)}$$

- Cuando los datos proporcionados por el problema son **dos puntos** $(\boldsymbol{x_1}\ ;\ \boldsymbol{y_1})$ **y** $(\boldsymbol{x_2}\ ;\ \boldsymbol{y_2})$ que pertenecen a la recta, podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA

Como vimos anteriormente cada función lineal tiene asociada una recta que la representa, formada por todos los pares de puntos $(x; y)$ que verifican la ecuación explícita $y = mx + b$.
Pero también es posible analizar a la recta como objeto geométrico y su relación con las distintas expresiones algebraicas asociadas a ella. A continuación analizaremos la relación entre las pendientes de las rectas y como estas nos permitirán determinar la posición relativa de dos rectas.

- POSICIÓN RELATIVAS ENTRE DOS RECTAS COPLANARES

Dos rectas en el plano pueden tener tres posiciones relativas. Estas posiciones están definidas en base del número de puntos comunes entre ellas. Estas pueden ser *secantes*, *paralelas* o *coincidentes*.

- Dos rectas R_1 y R_2 son secantes si se cortan (o interceptan) en un punto. Si al interceptarse forman un ángulo de 90º, las rectas secantes son ***perpendiculares.*** La condición analítica para que esto suceda es que el producto de las pendientes de las rectas sea igual a **-1**.

Por lo tanto, si las ecuaciones explícitas de las rectas dadas son: R_1: $y = \boldsymbol{m_1}.x + b_1$ y R_2: $y = \boldsymbol{m_2}.x + b_2$, R_1 es perpendicular a R_2 si y solo si $\boldsymbol{m_1.m_2 = -1}$ esto es equivalente a $\boldsymbol{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$, es decir que las pendientes son inversas de distinto signo.

En símbolos:

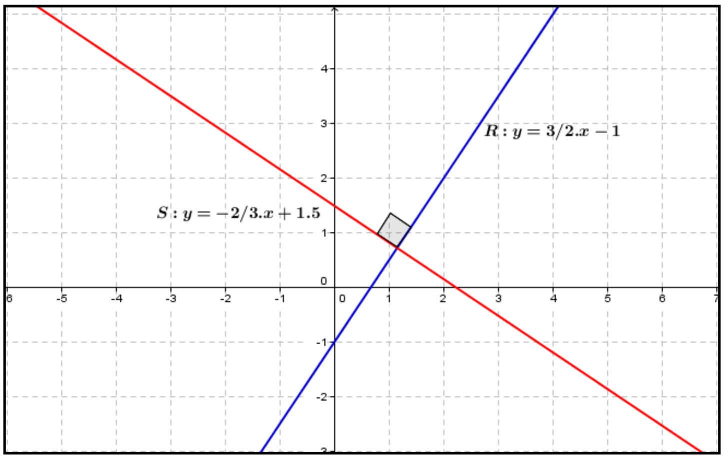
$$\boldsymbol{R_1 \perp R_2 \quad si \ \ y \ solo \ si \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$

Gráficamente:

Las ecuaciones de las rectas representadas son, respectivamente: R: $y = \frac{3}{2}.x - 1$ y S: $y = -\frac{2}{3}.x + 1{,}5$

.

Observamos que el producto de las pendientes es igual a -1: $\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$



- ✓ El paralelismo es una propiedad de las rectas que siempre tienen entre sí la misma distancia que las separa. Esto quiere decir en otras palabras que nunca se interceptan, por ello podemos concluir que si dos rectas R_1 y R_2 son ***paralelas*** entonces tienen la misma pendiente.

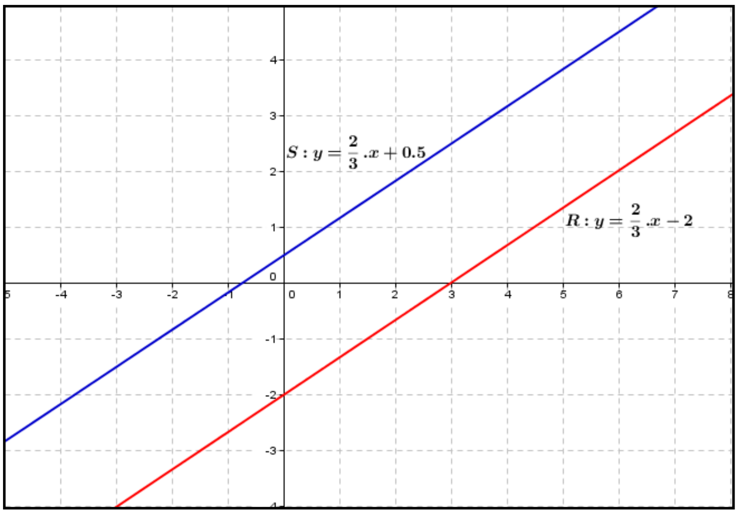
En símbolos:

$$\boldsymbol{R_1 // R_2 \quad si \ \ y \ solo \ si \quad m_1 = m_2}$$

Gráficamente:

Las ecuaciones de las rectas representadas son, respectivamente: R: $y = \frac{2}{3}.x - 2$ y S: $y = \frac{2}{3}.x + 0{,}5$.

Observamos que sus pendientes son iguales a $\frac{2}{3}$



✓ Si dos rectas R_1 y R_2 de igual pendiente tienen, además, la misma ordenada al origen, se llaman r***ectas coincidentes***.

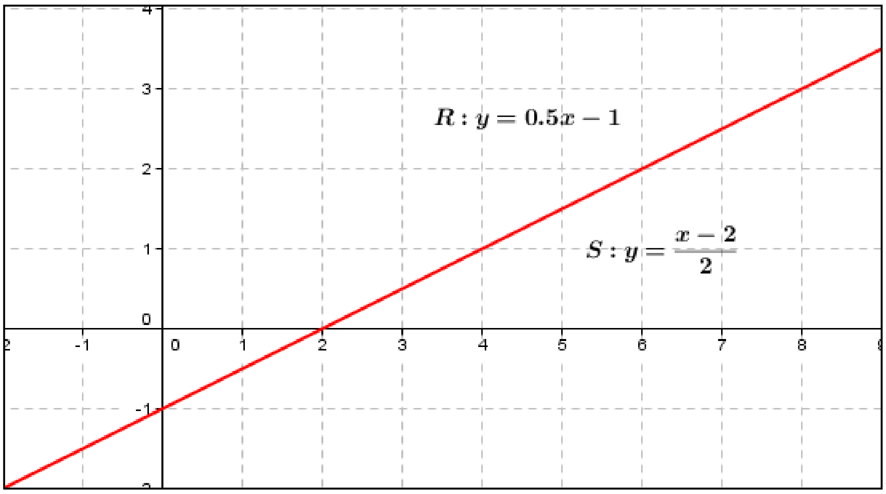
En símbolos:

$$\boldsymbol{R_1 \equiv R_2 \quad si \;\; y \, solo \, si \quad m_1 = m_2 \wedge b_1 = b_2}$$

Gráficamente:

Las ecuaciones de las rectas representadas son, respectivamente: R: $y = 0{,}5.x - 1$ y S: $y = \frac{x-2}{2}$.

Observamos que tienen igual pendientes e igual ordenada al origen.



Lo antes explicado permite anticipar la posición de dos rectas con solo observar el valor de la pendiente y ordenada al origen.

❖ DISTINTAS FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Cuando la ecuación de la recta está escrita en términos de la pendiente y la ordenada al origen, es decir, de la forma:

$$\boldsymbol{y = m.x + b}$$

decimos que está escrita en **forma explícita**

La ecuación de una recta también puede estar expresada en función de la raíz y la ordenada al origen. Cuando esto sucede decimos que está escrita en **forma segmentaria o canónica** y su expresión es de la forma:

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

donde $\boldsymbol{a}$ representa el valor de la raíz y $\boldsymbol{b}$ representa el valor de la ordenada al origen.

¿Cómo llegamos a la ecuación segmentaria de la recta a partir de la ecuación explícita? Consideremos la ecuación explícita de una recta no ***paralela a los ejes coordenados y que no contenga al origen de coordenadas***:

$$\boldsymbol{y = m.x + b}$$

$$\boldsymbol{y - m.x = b} \qquad despejamos\ \boldsymbol{b}$$

$$\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} - \frac{\boldsymbol{m.x}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}} \qquad dividimos\ ambos\ miembros\ por\ \boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$$

$$\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} - \frac{\boldsymbol{m.x}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{1} \qquad resolvemos$$

$$\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{x}}{-\boldsymbol{b}/\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{1} \qquad escribimos\ la\ fracción\ -\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{b}}\ como\ \frac{\boldsymbol{1}}{-\boldsymbol{b}/\boldsymbol{m}}$$

Luego llamamos $\boldsymbol{a = -b/m}$ y reemplazamos en la expresión,

$$\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{1}$$

Por último conmutamos los términos de la izquierda y obtenemos la ecuación segmentaria de la recta:

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{1}$$

- ✓ Observamos que en la búsqueda de la forma segmentaria de la recta, escribimos la condición $(\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$ ¿Por qué? ¿Qué implicancia tiene esta condición sobre $\boldsymbol{b}$? ¿Todas las ecuaciones de rectas pueden expresarse en forma segmentaria? Una recta que pasa por el origen de coordenadas puede escribirse en forma segmentaria? Justificar y dar ejemplos.

- ✓ ¿Cuál es la ventaja de expresar una recta en forma segmentaria? La ventaja principal es que se puede realizar su gráfica sin efectuar cálculos, pues los números $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ indican la intersección de la recta con el eje de abscisa y ordenada respectivamente.

- ✓ Ahora comprobaremos que los números reales (no nulos) $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se corresponden con la abscisa al origen y la ordenada al origen, respectivamente:

Consideremos la ecuación segmentaria de una recta R:

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{1}$$

Por lo visto anteriormente, para obtener la ordenada al origen de una función hacemos $\boldsymbol{x = 0}$**,** entonces reemplazando en la expresión tenemos:

$$\frac{0}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad resolviendo$$

$$\frac{y}{b} = 1 \qquad despejando\ \ y$$

$$\boldsymbol{y = b}$$

Por lo tanto la recta interseca al eje de ordenadas en el punto $(0; b)$.

Para determinar la intersección de la recta con el eje de abscisa, es decir, para hallar su raíz hacemos $\boldsymbol{y = 0.}$
Reemplazando en la expresión segmentaria de la recta obtenemos:

$$\frac{x}{a} + \frac{0}{b} = 1 \ \ resolvemos$$

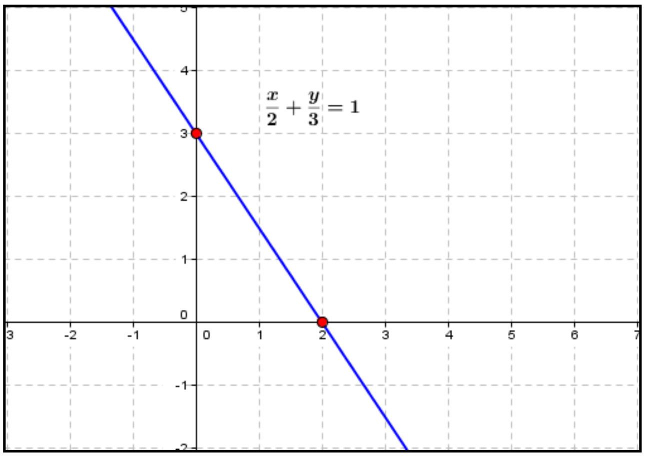
$$\frac{x}{a} = 1 \ \ despejamos\ x$$

$$\boldsymbol{x = a}$$

Ejemplo 8
Representar gráficamente la siguiente recta dada en forma segmentaria. Luego hallar su expresión explícita.

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

Respuesta:
Observando la ecuación dada podemos determinar que la recta intercepta al eje de abscisa en $x = 2$ (punto de coordenadas $(2; 0)$) ye intercepta al eje de ordenadas en $y = 3$ (punto de coordenadas $(0; 3)$) . A continuación marcamos estos puntos de corte en un sistema de ejes cartesianos y trazamos la recta:



Ahora escribamos la ecuación de la recta en forma explícita:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \ \ reescribamos\ la\ fracción$$

$$\frac{1}{2}.x + \frac{1}{3}.y = 1 \ \ despejamos\ y$$

$$\frac{1}{3}.y = 1 - \frac{1}{2}.x$$

$$y = \left(1 - \frac{1}{2}.x\right).3$$

$$y = 3 - \frac{3}{2}.x \ \ \boldsymbol{ecuación\ explícita\ de\ la\ recta}$$

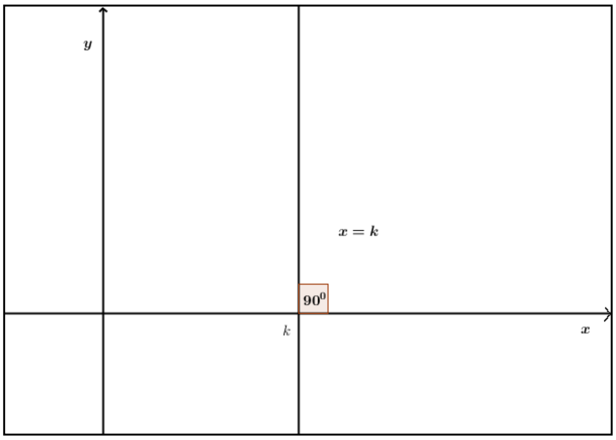
Por último, la ecuación de una recta está dada en **forma implícita** (o general) cuando está escrita de la forma:

$$\boxed{\boldsymbol{A.x + B.y + C = 0}}$$

donde A, B y C son números reales y A y B no son simultáneamente ceros.

❖ <u>RECTA VERTICAL</u>

La ecuación de toda recta vertical es de la forma $\boldsymbol{x = k}$**,** siendo $\boldsymbol{k}$ cualquier número real.



Las rectas verticales son paralelas al eje y, y forman un ángulo de 90° con el eje x, es decir que el ángulo de inclinación es igual a $\hat{\alpha} = 90°$ .Es por ello que no tienen pendiente. Si tuviese pendiente, esta debería verificar la relación con el ángulo de inclinación:

$$\boldsymbol{m = tan\alpha}$$

Luego, reemplazamos en ésta relación el valor del ángulo de inclinación,

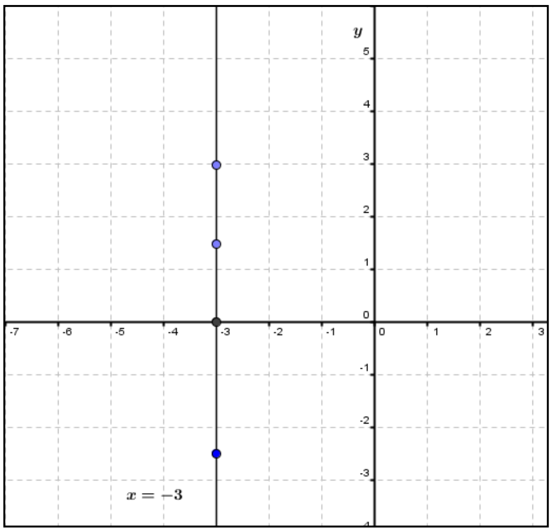
$$m = tan90°$$

Con la ayuda de una calculadora científica podemos verificar que $tan90°$ no existe.

Estas rectas NO pueden asociarse a funciones.

<u>Ejemplo 9</u>
Representar gráficamente la recta dada $x = 4$. Indicar algunos puntos que pertenecen a ella e identificar que tienen en común

<u>Respuesta</u>:
La representación gráfica de esta recta es:

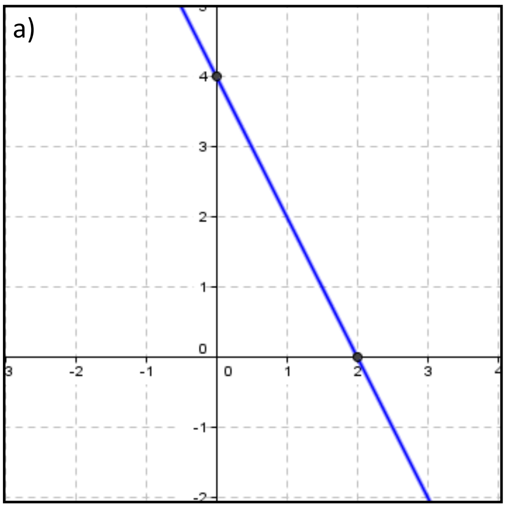


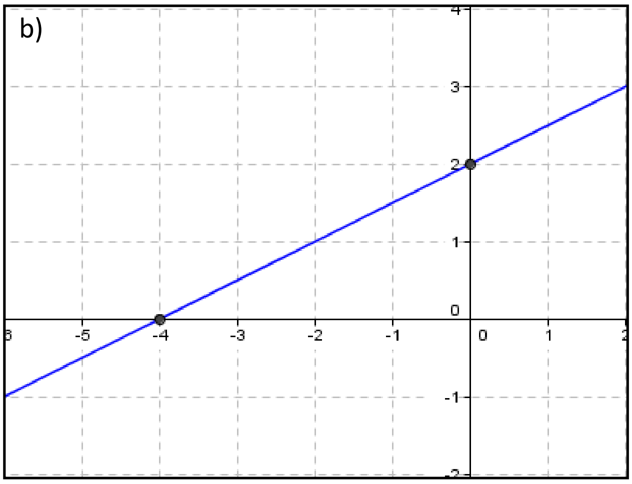
Algunos puntos que pertenecen a ésta recta son: $(-3;\ -2{,}5)$; $(-3;\ 0)$; $(-3;\ 1{,}5)$ y $(-3;\ 3)$.

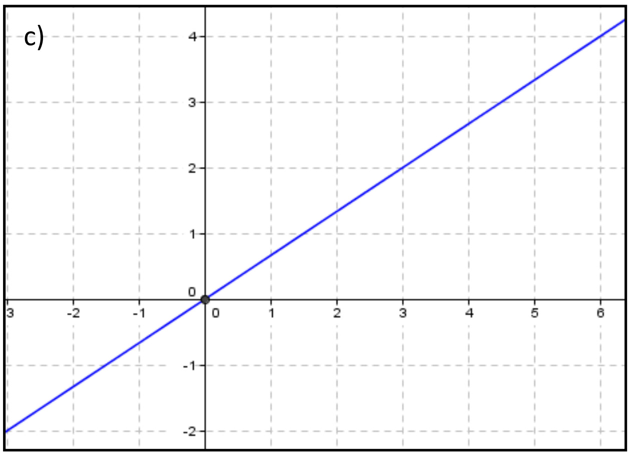
En todos ellos la primera coordenada es igual a -3.

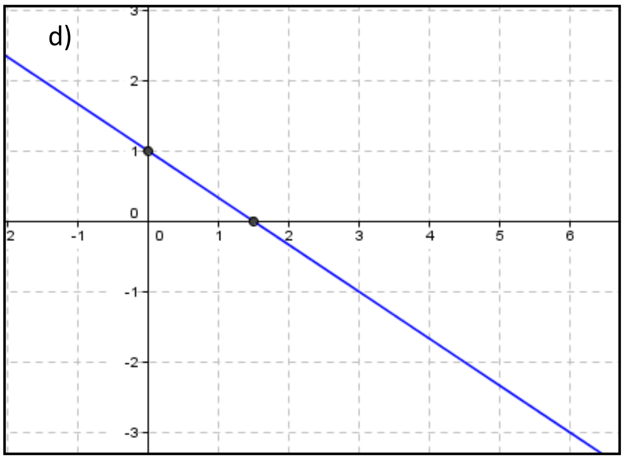
ACTIVIDADES

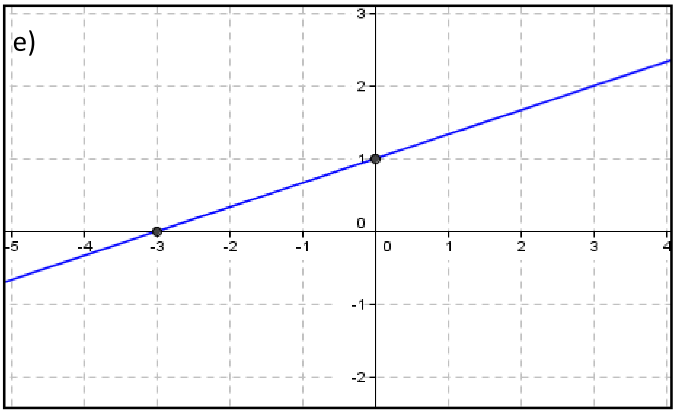
Ejercicio 1: Observar los siguientes gráficos y escribir, cuando sea posible, en forma segmentaria y explícita la ecuación de cada una de las rectas representadas.

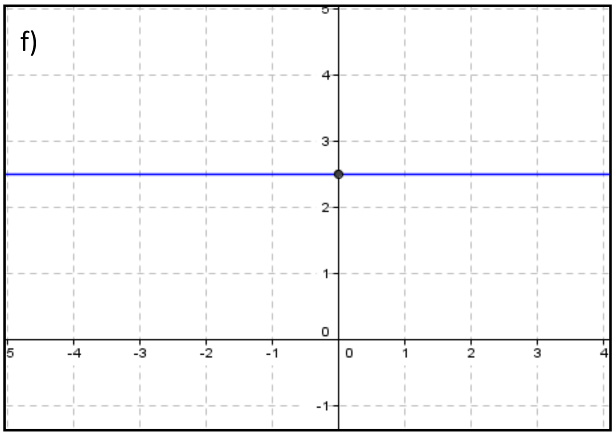












Ejercicio 2: Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) $(-2;\ -1)$ y $(-4\,;\ -3)$

b) $(6\,;\ -1)$ y $(-2\,;\ 4)$

c) $(3\,;\ 5)$ y $(7\,;\ -2)$

d) $(1\,;\ -5)$ y $(10\,;\ 11)$

Ejercicio 3: Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada al origen son respectivamente 5 y -1. Graficar.

Ejercicio 4: Averiguar si los puntos $(0\,,2)$, $(1\,,-1)$ y $(-1\,,\ 5)$ están alineados. Representar gráficamente.

Ejercicio 5: Un kilogramo de papas cuesta $32. Escribir y representar la función que define el valor de las papas en función de los kilogramos comprados.

Ejercicio 6: Cada una de las siguientes tablas corresponde a una función lineal. Para cada una de ellas:

a) Completar la tabla de tal forma que la función represente una función de proporcionalidad directa.

b) Escribir una fórmula que relacione los elementos de la primera fila con los de la segunda.

c) Representar los datos de la tabla en un sistema de coordenadas cartesianas.

Tiempo de marcha (en horas)	1	2	3			
Espacio recorrido (en km.)	80			400	800	50

Capital invertido (en pesos)	1000	500	250		
Interés percibido (en pesos)	100			12.5	75

Masa del aluminio (en gramos)	2,7				13,5
Volumen del aluminio (en cm^3)	1	2	3		

Ejercicio 7: El estudio de cierta tabla permite establecer que

$f(3) = 7$ $\qquad$ $f(8) = 16{,}2$ $\qquad$ $f(11) = 26$

¿Representa dicha tabla una función de proporcionalidad directa?. Justificar.

Ejercicio 8: La siguiente tabla representa la relación existente entre el valor de los lados y el perímetro de tres cuadrados:

$LADO\ (l)$	$PERÍMETRO$ (P)
1	4
2	8
3	12

Responder:

a) ¿Se trata de una función de proporcionalidad directa?.

b) ¿Cuánto vale la constante de proporcionalidad?.

c) Expresar la función mediante una fórmula y representar gráficamente.

Ejercicio 9: Para distintos trozos de un mismo material, el peso es directamente proporcional al volumen.

a) Completar los cuadros y las fórmulas para cada uno de los materiales indicados.

MADERA DE PINO

Volumen (dm^3)	1	5	10	20
Peso (kg)			9	

$P = \ \dots\dots V$

CORCHO SINTÉTICO

Volumen (dm^3)	1	5		20
Peso (kg)			2	

$P = \ 0{,}2 \, . V$

GRANITO

Volumen (dm^3)		5	10	
Peso (kg)	60		30	3

$P = \ \dots\dots . V$

b) Representar en un mismo gráfico las tres situaciones.

En cada caso la constante de proporcionalidad representa la densidad del material (peso por unidad de volumen).

Ejercicio 10: Determinar, sin necesidad de representarlas, cuáles de las siguientes rectas son **paralelas**. Explicar cómo lo hiciste.

$$r: \ \frac{y}{-3} + \frac{x}{2/3} = 1; \qquad s: \ 3y = 3x + 21; \qquad t: \ \frac{y+1}{x-3{,}5} = \frac{-6}{-3}\ ; \qquad u: \ 0{,}5\, y = x$$

$$v: \frac{y}{-3} + \frac{x}{3} = 1\ ; \qquad w: 2y - 4x + 1 = 0\ ; \qquad q: y = -x + 7$$

Ejercicio 11: Razonar, sin necesidad de representarlas, cuáles de las siguientes rectas son **perpendiculares**:

$$r: \ \frac{y}{-1} + \frac{x}{0{,}5} = 1; \qquad s: \ 3y - 4x - 2 = 0\ ; \qquad t: \ \frac{y-3}{x} = \frac{-1}{2}\ ; \qquad u: \ -\ 0{,}2\, y = x$$

$$v: \frac{y}{-3} + \frac{x}{15} = 1\ ; \qquad w: \ -7y + 3x + 14 = 0\ ; \qquad q: y = -\frac{3}{4}x + 5$$

Ejercicio 12: Las rectas de ecuaciones $a\,x - y = 4$; $x + b = y$ son perpendiculares y cortan al eje de las abscisas en dos puntos distantes cinco unidades. Hallar a y b.

Ejercicio 13:

a) Halla la ecuación de la recta R que tiene por pendiente 4 y cuya ordenada en el origen vale –7.

b) Halla la ecuación de la recta S que pasa por el punto $\boldsymbol{A}(-\mathbf{1},\mathbf{5})$ y cuya pendiente es 1.

c) Halla la función lineal que pasa por los puntos $\boldsymbol{B}(\mathbf{2},-\mathbf{2})$ y $\boldsymbol{C}(\mathbf{8},\mathbf{1})$. Llamar M a la recta que la representa.

d) Representar gráficamente todas las rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio 14: Hallar, en cada caso, la ecuación de la recta que cumpla con las siguientes condiciones:

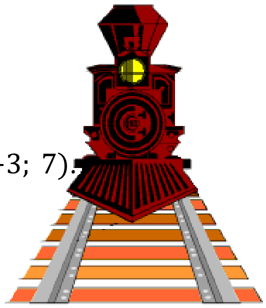
a) Pasa por los puntos $(1;\ 2)$ y $(2;-1)$.

b) Tiene pendiente -2 y ordenada en el origen 10.

c) La ecuación segmentaria de una recta que pasa por los puntos $(2;2)$ y $(-2;-8)$.

d) Pasa por el punto $(0;\ 6)$ y tiene pendiente igual a 0.

e) Es paralela a la recta de ecuación $y = 3x - 4$ y pasa por el punto de coordenadas $(-3;\ 7)$.



Ejercicio 15:

a) Obtener la ecuación segmentaria de la recta M que pasa por $(-1;5)$ y $(-2;3)$.

b) Hallar una recta T, paralela a M que pase por el punto (3 ; 2).

c) Encontrar una recta S, perpendicular a M, cuya ordenada sea $-\frac{1}{2}$.

d) Representar gráficamente las rectas obtenidas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio 16: Dada la recta de ecuación $y = \frac{1}{5}x + 3$, hallar la recta que cumpla en cada caso las condiciones pedidas:

a) Paralela a la misma y de ordenada al origen igual a la de la recta $2x + y = 8$.

b) Perpendicular a la misma y de ordenada al origen -2.

c) Paralela a la misma y que pase por el punto $Q\ (1, ½\ )$.

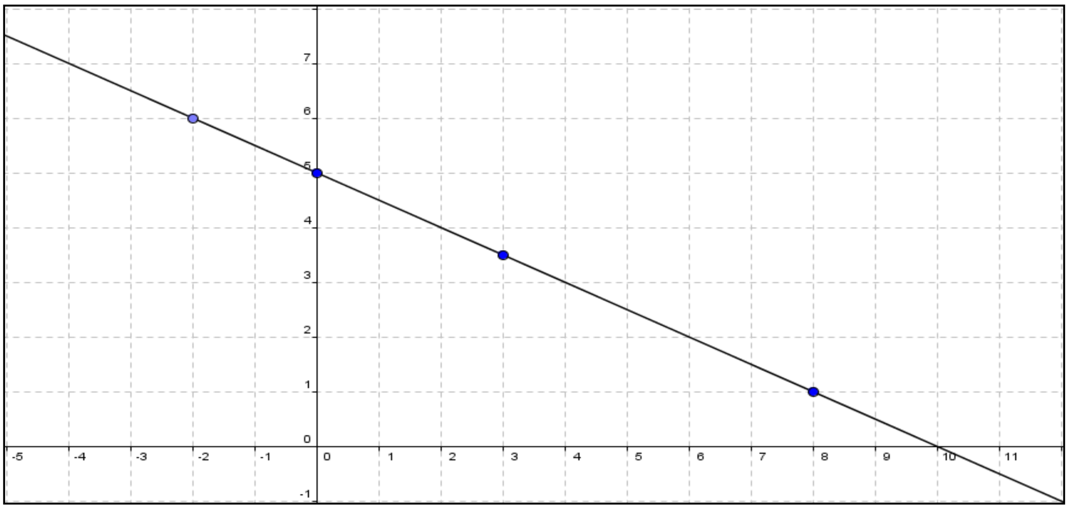
d) Perpendicular a la misma y de proporcionalidad.

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Una ecuación lineal con dos incógnitas x y y es una expresión de la forma a$x + by = c$, donde $c, b, a \in R$ y a y b son diferentes de cero a la vez.

Toda ecuación lineal con dos incógnitas tienen como solución a todos los pares ordenados que verifican la ecuación, es decir, tiene infinitas soluciones de la forma (x, y). Estas soluciones están contenidas en una recta.

Por ejemplo, la ecuación lineal $2x + 4y = 20$ tiene infinitas soluciones. Algunos de los pares de valores que son solución de ésta ecuación son: $(-2;\ 6), (0; 5), (3, 3{,}5)$, $(8; 1)$ .Para conseguirlas, elegimos arbitrariamente, un valor para x y luego, despejando obtenemos el correspondiente valor de y. La representación gráfica de la ecuación $2x + 4y = 20$ es una recta. Los puntos que pertenecen a la recta verifican la ecuación y por lo tanto son las soluciones de la misma. En el siguiente gráfico podemos visualizar lo antes dicho.



Un sistema de dos ecuaciones lineales con incógnitas x y y , también llamado ecuaciones simultáneas de dos por dos es de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1\ y\ c_2\ \in R$, y en cada una de las ecuaciones, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero.

Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema, se abarca el conjunto de todas ellas con una llave. En cada una de las ecuaciones, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero.

Resolver analíticamente un sistema de este tipo es encontrar, si existen, los pares de números reales $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ que satisfacen ambas ecuaciones.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es representado geométricamente por dos rectas en el plano. Por lo tanto la solución de un sistema es el conjunto de puntos que ambas rectas tienen en común. La resolución analítica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas equivale geométricamente a estudiar las posiciones relativas de las rectas en el plano.

MÉTODOS ANALÍITICOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES

Existen varios métodos analíticos que permiten resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. La elección de un método u otro dependerá de cómo está planteado el sistema original. Claro está que independientemente del método que se elija siempre se debe arribar al mismo resultado.

- METODO DE SUSTITUCIÓN

Para resolver un sistema utilizando el método de sustitución se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Elegir una de las ecuaciones y despejar de ella una de las incógnitas (cualquiera).
2. Sustituir la expresión obtenida en el paso 1. en la otra ecuación del sistema (recuerde usar paréntesis cuando realice la sustitución). Queda planteada una ecuación con una sola incógnita.
3. Resolver la nueva ecuación obtenida en el paso anterior. De ésta manera, se halla el valor de una de las incógnitas.
4. Reemplazar el valor obtenido en el paso 3 en el despeje del paso 1. y calcular el valor de la segunda incógnita.
5. Escribir el conjunto solución.

Ejemplo 10

Resolver los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución.

$$a)\ \begin{cases} 2x+3y=4 \\ \frac{1}{2}x+y=3 \end{cases} \qquad\qquad b)\ \begin{cases} x-\frac{2}{3}y=2 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$$

Solución inciso a)

Por como está planteado el sistema, nos conviene elegir despejar la incógnita $\boldsymbol{y}$ de la segunda ecuación:

$$\frac{1}{2}x+y=3 \qquad \Rightarrow \qquad y=-\frac{1}{2}x+3$$

Esta nueva ecuación obtenida es equivalente a la original, es decir, tendrá el mismo conjunto solución que la original. Reemplazamos la expresión obtenida para $\boldsymbol{y}$ en la otra ecuación del sistema:

$$2x+3\boldsymbol{y}=4$$

$$2x+3.\overbrace{\left(-\frac{1}{2}x+3\right)}=4$$

La ecuación que quedo planteada tiene una sola incógnita, la resolvemos despejando x:

$$2x + 3.\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\right) = 4$$

$$2x - \frac{3}{2}x + 9 = 4$$

$$\frac{1}{2}x = 4 - 9$$

$$x = -10$$

Una vez hallado el valor de x, lo reemplazamos en la expresión en la cual despejamos y,

$y = -\frac{1}{2}x + 3 \quad \Rightarrow \quad$ para $x = -10$, obtenemos $y = -\frac{1}{2}.(-\mathbf{10}) + 3 \quad \Rightarrow \quad y = 8$

Entonces, el par ordenado $(-10; 8)$ es el **único** par de valores que verifica simultáneamente ambas ecuaciones. Decimos que el sistema tiene única solución.

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es $S = \{(-10; 8)\}$.

Gráficamente las rectas que representan a cada ecuación del sistema son secantes, se intersecan en un punto. Por lo tanto tienen distintas pendientes.

<u>Solución inciso b)</u>

Elegimos despejar la incógnita x de la primera ecuación:

$$x - \frac{2}{3}y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}y + 2$$

Sustituimos la expresión obtenida para $\boldsymbol{x}$ en la otra ecuación del sistema:

$$3x - 2y = 6$$

$$3.\overbrace{\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{y} + \mathbf{2}\right)} - 2\text{y} = 6$$

Resolvemos la ecuación planteada y obtenemos:

$$2\text{y} + 6 - 2\text{y} = 6 \quad \Rightarrow \quad 2y - 2y = 6 - 6 \quad \Rightarrow \quad 0y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

La igualdad que obtuvimos es siempre válida, esto significa que independientemente del valor que le asignemos a $\boldsymbol{y}$**,** siempre se cumple la igualdad. ¿Qué significa esto? Significa que la ecuación posee infinitas soluciones, ya que podemos asignarle a cualquier valor a $\boldsymbol{y}$ con el cual, a partir de la condición $x = \frac{2}{3}y + 2$ se determina el valor de x. Por lo tanto existen infinitos pares $(x\,;y\,)$ que verifican simultáneamente ambas ecuaciones.

Concluimos que el sistema posee infinitas soluciones. Los pares que son solución del sistema tienen la forma:

$\left(\frac{2}{3}y + 2\,;y\,\right)$ donde y es cualquier número real.

Entonces, el conjunto solución del sistema lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$S = \left\{\left(\frac{2}{3}y + 2\,;y\right)\,, y \in \mathbb{R}\right\}$$

Gráficamente las rectas que representan a cada ecuación del sistema son coincidentes, es decir, tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen

- METODO DE IGUALACIÓN

Uno de los procedimientos que puede usarse para resolver un sistema es el llamado método de igualación. Se conoce con este nombre debido a que consiste en "igualar" las expresiones que se obtienen de despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones.

Este método consta de los siguientes pasos:

1. Despejar de ambas ecuaciones la misma incógnita
2. Igualar las expresiones obtenidas en el paso 1. De esta manera queda planteada una ecuación de una incógnita y permite obtener el valor de una de las incógnitas, en caso de que exista.
3. Resolver dicha ecuación.
4. Reemplazar el valor obtenido en el paso 3 en ambas ecuaciones y obtener el valor de la segunda incógnita.
5. Escribir el conjunto solución.

Ejemplo 11

Resolver los siguientes sistemas utilizando el método de igualación

$$a)\ \begin{cases} y = 3x + 2 \\ -0{,}5x + y = -3 \end{cases} \qquad\qquad b)\ \begin{cases} -2x + y = -4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Solución inciso a)

Por como está planteado el sistema elegimos despejar la incógnita y de ambas ecuaciones, de esta manera obtenemos: $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 0{,}5x - 3 \end{cases}$

A continuación igualamos las expresiones obtenidas para determinar, si existe, el valor de x que permite obtener el mismo valor de y en ambas ecuaciones:

$$3x + 2 = 0{,}5x - 3$$

Queda planteada una ecuación cuya única incógnita es x. Al resolverla, obtenemos $x = -2$ (queda a cargo del alumno verificar este resultado).

Falta averiguar el valor de y. Para ello, reemplazamos en ambas ecuaciones el valor obtenido de x :

$$y = 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad y = 3.(\mathbf{-2}) + 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = -4}$$

$$-0{,}5x + y = -3 \quad \Rightarrow \quad -0{,}5.(\mathbf{-2}) + y = -3 \quad \Rightarrow \quad 1 + y = -3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = -4}$$

El valor de y obtenido en ambos casos coincide.

El conjunto solución es $S = \{(-2; -4)\}$.

Solución inciso b)

Despejamos de ambas ecuaciones la incógnita y, obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Igualamos las expresiones obtenidas y resolvemos la ecuación planteada:

$$2x - 4 = 2x + 1$$

$$2x - 2x = 4 + 1$$

$$0x = 5$$

$$0 = 5 \quad \text{ABSURDO!!!!}$$ 😱

Al intentar resolver el sistema arribamos a una expresión falsa. Concluimos que la ecuación planteada no tiene solución, es decir no existe ningún valor de x que la verifique. En consecuencia tampoco hay ningún valor de y. No existe ningún par de valores $(x\,;y\,)$ que verifiquen simultáneamente ambas ecuaciones

Entonces el conjunto solución es vacio, y lo escribimos: $\boldsymbol{S = \emptyset}$**.**

Gráficamente las rectas que representan a cada ecuación del sistema son paralelas, es decir, tienen la misma pendiente y distinta ordenada al origen

- METODO DE REDUCCION POR SUMA Y RESTAS

Para resolver un sistema por éste método, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Expresar ambas ecuaciones en forma implícita.
2. Multiplicar todos los coeficientes de una de las ecuaciones por un mismo número distinto de cero, de modo que los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones resulten iguales u opuestas (iguales en valor absoluto).
3. Sumar o restar la ecuación obtenida en el paso 2. con la otra ecuación del sistema que no fue modificada, de manera que se cancele los términos que contengan la misma incógnita. Esto permite obtener una ecuación con una sola incógnita.
4. Resolver la ecuación obtenida.
5. Reemplazar el valor obtenido en el paso 4 en ambas ecuaciones y obtener el valor de la segunda incógnita.
6. Escribir el conjunto solución.

Ejemplo 12 Resolver los siguientes sistemas utilizando el método de reducción.

$$a)\ \begin{cases} -5x + 2y = -4 \\ \ \ 2x - 4y = 4 \end{cases} \qquad\qquad b)\ \begin{cases} 5x - 5y + 5 = 0 \\ \ \ 0{,}5y + x = 2 \end{cases}$$

Solución inciso a)

Al analizar las ecuaciones que componen el sistema, estas están escritas en forma implícita. Para casos como éste, es conveniente utilizar el método de reducción. Para ello, elegimos multiplicar por **2** todos los coeficientes de la primera ecuación:

$$-5x+2y=-4$$

$$(-5x+2y).\mathbf{2}=(-4).\mathbf{2}$$

$$\mathbf{-10x+4y=-8}$$

Al reemplazar la primera ecuación del sistema por la ecuación obtenía, conseguimos un sistema equivalente al original:

$$\begin{cases}-5x+2y=-4\\ \ \ 2x-4y=4\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}\mathbf{-10x+4y=-8}\\ \ \ 2x-4y=4\end{cases}$$

Observemos que en el nuevo sistema planteado los coeficientes de la incógnita y son opuestos. Entonces si sumamos ambas ecuaciones lograremos eliminar los términos que contienen a la incógnita y, y conseguiremos una ecuación en términos solamente de la otra variable.

$$\begin{array}{r} -10x+4y=-8 \\ +\quad 2x-4y=4 \\ \hline -8x=-4 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Reemplazamos en ambas ecuaciones el valor obtenido de x :

$$-5x+2y=-4 \quad \Rightarrow \quad -5.\left(\frac{1}{2}\right)+2y=-4 \quad \Rightarrow \quad 2y=-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y=-\frac{3}{4}}$$

$$2x-4y=4 \quad \Rightarrow \quad 2.\left(\frac{1}{2}\right)-4y=4 \quad \Rightarrow -4y=3 \quad \Rightarrow \boldsymbol{y=-\frac{3}{4}}$$

El valor de y obtenido en ambos casos coincide.

Por lo tanto, el conjunto solución es $S=\left\{\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)\right\}$.

<u>Solución inciso b)</u>

Antes de comenzar a resolver el sistema por el método de reducción, es conveniente ordenarlo para poder realizar la suma correctamente. Entonces:

$$\begin{cases}5x-5y+5=0\\ \ \ 0{,}5y+x=2\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}5x-5y=-5\\ x+0{,}5y=2\end{cases}$$

Recordemos que el nuevo sistema obtenido es equivalente al original, es decir tienen la misma solución.

Luego de analizar los coeficientes de las incógnitas, elegimos multiplicar por **-5** todos los coeficientes de la segunda ecuación:

$$x+0{,}5y=2$$

$$(x+0{,}5y).(\mathbf{-5})=2.(\mathbf{-5})$$

$$\boldsymbol{-5x-\frac{5}{2}y=-10}$$

Reemplazamos esta nueva ecuación en el sistema:

$$\begin{cases} 5x - 5y = -5 \\ -5x - \dfrac{5}{2}y = -10 \end{cases}$$

En este caso, los coeficientes de la incógnita x son opuestos. Entonces si sumamos ambas ecuaciones lograremos eliminar los términos que contienen a la incógnita x, y conseguiremos una ecuación en términos solamente de la otra variable.

$$\begin{array}{r} 5x - 5y = -5 \\ + \; -5x - \dfrac{5}{2}y = -10 \\ \hline -\dfrac{15}{2}y = -15 \\ y = 2 \end{array}$$

Reemplazamos en ambas ecuaciones el valor obtenido de y :

$5x - 5y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - 5.\mathbf{2} + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x = 5 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 1}$

$0{,}5y + x = 2 \quad \Rightarrow \quad 0{,}5.\mathbf{2} + x = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 + \mathrm{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 1}$

El valor de x obtenido en ambos casos coincide. Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{(1; 2)\}$.

CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS SEGÚN SU SOLUCION

Todo sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede asociarse con dos rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos. Por eso, la clasificación del sistema, y por ende, la cantidad de soluciones que este tiene, guardan estrecha vinculación con la relación entre las rectas que lo representan gráficamente.

En un sistema de dos ecuaciones lineales se pueden presentar tres situaciones:

- ✓ Si el sistema no tiene solución, es decir, no existe ningún par $(x\,;y)$ que satisfaga simultáneamente ambas ecuaciones, decimos que el sistema es **incompatible.** Gráficamente las rectas que representan a las ecuaciones son **paralelas no coincidente**. Un ejemplo de esto es el sistema del ejemplo 11 inciso b.

- ✓ Si el sistema tiene solución y esta es única, decimos que el sistema es **compatible determinado.** Gráficamente las rectas se intersecan en un punto, éste representa la solución del sistema. Las **rectas son secantes.** Un ejemplo de esto es el sistema del ejemplo 11 inciso a.

- ✓ Si el sistema tiene solución pero no es única, es decir, existen infinitos pares $(x\,;y)$ que verifican simultáneamente ambas ecuaciones, decimos que el sistema es **compatible indeterminado.** Gráficamente las rectas tienen infinitos puntos en común, las **rectas son coincidentes**. Un ejemplo de esto es el sistema del ejemplo 10 inciso b.

A continuación analizaremos un modo de determinar si el sistema tiene o no solución y si la tiene si esta es única sin necesidad de resolverlo a través de algún método analítico. Para ello analizaremos la relación que existe entre los coeficientes de las ecuaciones que lo componen.

Consideremos nuevamente los sistemas de los ejemplos 10 y 11.

Los coeficientes de la incógnita x son 2 y $\frac{1}{2}$, los coeficientes de la incógnita y son 3 y 1 y los términos independientes son 4 y 3 respectivamente.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ \dfrac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$$

Si planteamos la razón entre los respectivos coeficientes, es decir:

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \frac{3}{1} \quad ; \quad \frac{4}{3}$$

podemos observar que no existe ninguna relación de proporcionalidad entre los coeficientes de los términos lineales, es decir:

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{4}{3}$$

Cuando sucede esto, podemos asegurar que el sistema tiene solución y que esta es única. Por lo tanto, clasificamos el sistema como **compatible determinado**. Gráficamente las rectas son secantes.

Analicemos el sistema $\begin{cases} x - \frac{2}{3}y = 2 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$. Para ello procederemos de forma análoga a lo anterior.

Los coeficientes de la incógnita x son 1 y 3 , los coeficientes de la incógnita y son $-\frac{2}{3}$ y -2 y los términos independientes son 2 y 6 respectivamente.

Planteamos las razones entre los coeficientes de los términos lineales y los términos independientes:

$$\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{-\frac{2}{3}}{-2} \quad ; \quad \frac{2}{6}$$

Observamos que existe una relación de proporcionalidad entre los coeficientes de los términos lineales y los términos independientes:

$$\frac{1}{3} = \frac{-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Esto lo interpretamos diciendo que el sistema tiene solución y son infinitas. Lo clasificamos como **compatible indeterminado**. Las rectas que representan a cada ecuación que compone el sistema son coincidentes.

Por último consideremos el sistema $\begin{cases} -2x + y = -4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$.

Antes de plantear las razones entre los coeficientes de los términos lineales y los términos independientes, es conveniente ordenar los términos para evitar errores:

$$\begin{cases} -2x + y = -4 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

Ahora si escribimos las razones:

$$\frac{-2}{-2} \quad ; \quad \frac{1}{1} \quad ; \quad \frac{-4}{1}$$

Observamos que existe una relación de proporcionalidad entre los coeficientes de los términos lineales pero no entre los términos independientes:

$$\frac{-2}{-2} = \frac{1}{1} \neq \frac{-4}{1}$$

$$1 = 1 \neq -4$$

Esto significa que el sistema no tiene solución, es decir, el sistema es **incompatible**. Las rectas que representan a cada ecuación del sistema son paralelas.

ACTIVIDADES

Ejercicio 1:

a) Resolver los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución.
b) Clasificar los sistemas según el tipo de solución.
c) Verificar gráficamente la solución obtenida.

$i)\ \begin{cases} -x + 5y = -6 \\ 2x + 10 + y = 0 \end{cases}$ $\qquad ii)\ \begin{cases} 0{,}5.\left(x - \frac{1}{2}\right) = y - 2 \\ 2x + 8 = 4y \end{cases}$

Ejercicio 2:

a) Resolver los siguientes sistemas utilizando el método de igualación.
b) Clasificar los sistemas según el tipo de solución.
c) Verificar gráficamente la solución obtenida.

$i)\ \begin{cases} y = \frac{5}{3} - \frac{1}{2}x \\ \frac{2}{3}x = y - \frac{1}{2} \end{cases}$ $\qquad ii)\ \begin{cases} 2.(x + 2y) - 6 = 2 \\ x - (8 - 2y) = -\frac{1}{2}.(4y + 2x) \end{cases}$

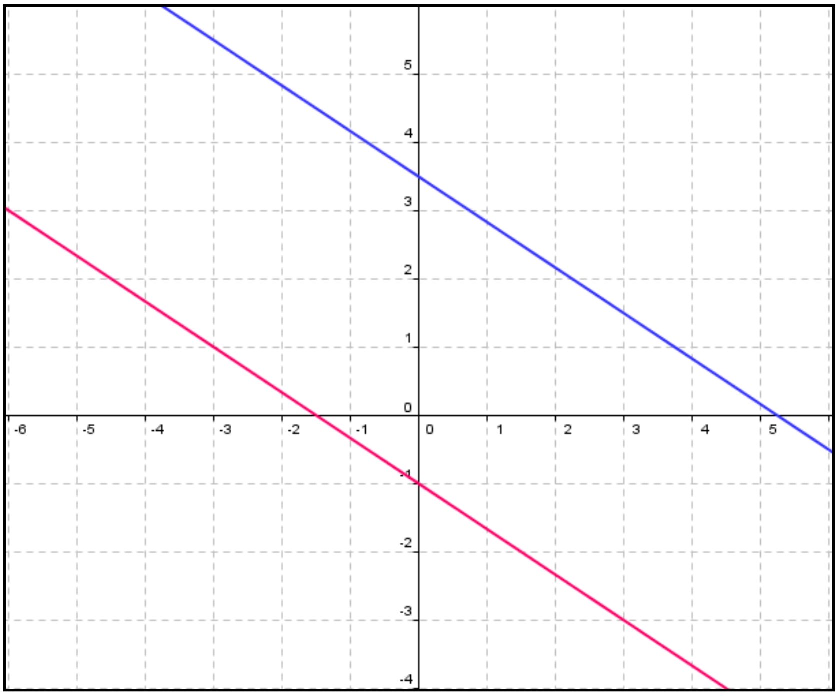
Ejercicio 3:

a) Resolver los siguientes sistemas utilizando el método de reducción.
b) Clasificar los sistemas según el tipo de solución
c) Verificar gráficamente la solución obtenida.

$i)\ \begin{cases} 2y + x = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ $\qquad ii)\ \begin{cases} -2x + 2y = 8 \\ x - y = -6 \end{cases}$

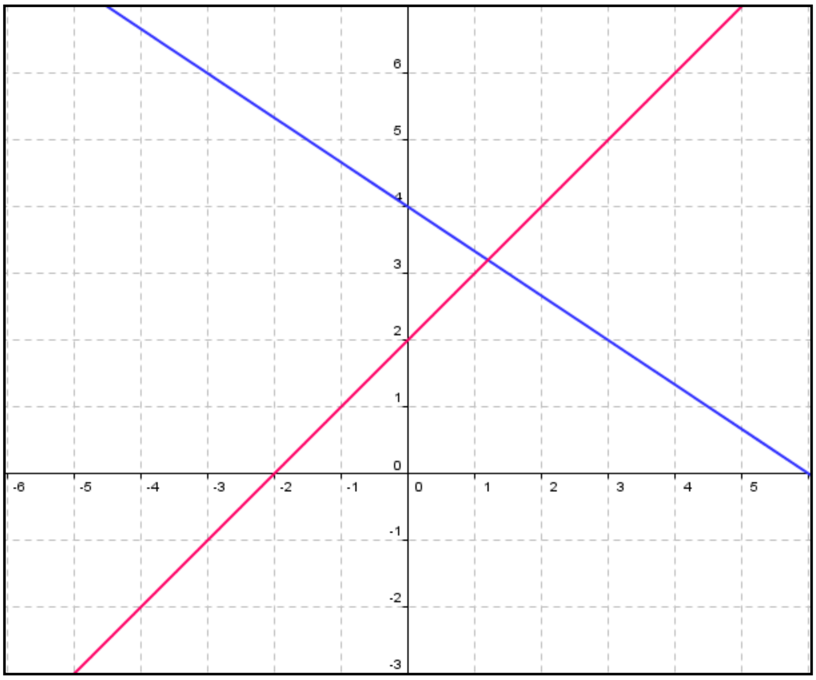
Ejercicio 4: Escribir un S.E.L. (sistema de ecuaciones lineales) que se corresponda a cada una de las siguientes situaciones definidas gráficamente.

a)



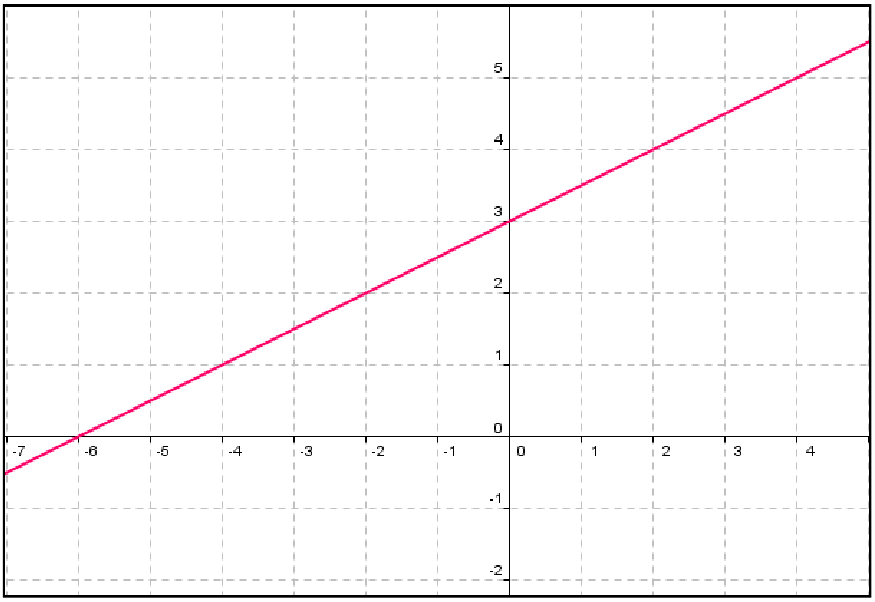
$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{cases}$$

b)



$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{cases}$$

c)



$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ejercicio 5: Clasificar, sin resolver, los siguientes sistemas:

$$i)\ \begin{cases} 6x - 3y = 4 \\ 1{,}5y - 3x = -2 \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} 2x - \frac{1}{3}y = 25 \\ 12x - 2y = 5 \end{cases} \qquad iii)\ \begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y = \frac{1}{2} \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 6: Hallar los valores de $\boldsymbol{a}$ para que $(4000\ ;\ 3000)$ sea la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = 0{,}75x \\ y = a.x + 500 \end{cases}$$

Ejercicio 7: Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} px - 6y = 3 \\ -2x - 2q + 4y = 0 \end{cases}$ indicar los valores de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ para que el sistema tenga:

a) única solución. b) ninguna solución. c) infinitas soluciones

Ejercicio 8: Completar la ecuación incompleta del sistema para que el conjunto solución sea el indicado.

$$a)\ \begin{cases} y = x - 5 \\ y = -2x + \ldots \end{cases} \qquad S = \{(3; -2)\}$$

$$b)\ \begin{cases} y = 5x + \ldots \\ y = x + 2 \end{cases} \qquad S = \left\{\left(-\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)\right\}$$

$$c)\ \begin{cases} y = \ldots x - 7 \\ y = 0{,}5x + 1 \end{cases} \qquad S = \emptyset$$

Ejercicio 9:

a) Agregar al sistema una ecuación para que la única solución sea $x = 2\ ;\ y = -5$

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ \ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

b) La ecuación agregada en el inciso anterior ¿es la única que cumple con la condición pedida? Justificar.

Ejercicio 10: Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ y = ax + b \end{cases}$

Determinar en, cada caso, los valores de a y de b para que el sistema sea:

a) Compatible Determinado,
b) Compatible Indeterminado,
c) Incompatible.

Ejercicio 11: Un ciclista que circula por una senda rectilínea a una velocidad constante de 4 m/s, pasa, en un cierto momento, por un puesto de control. Otro ciclista que circula por la misma senda, pero en sentido contrario, a una velocidad constante de 3m/s, pasa por el mismo puesto 20 segundos después.

a) Hallar las ecuaciones de los movimientos de ambos ciclistas.
b) Determinar el instante en que se encuentran y a qué distancia del puesto lo hacen.
c) Verificar gráficamente los resultados obtenidos.

Ejercicio 11: Una empresa tiene un ingreso mensual de $30 por unidad vendida de cierto producto. Por otra parte, el costo fijo mensual es de $4800 y el costo variable de $22 por unidad. ¿Cuántas unidades es necesario vender por mes para que el ingreso sea igual al costo total, y cuál es ese valor?

Ejercicio 12: Hace cinco años, la población de una pequeña comunidad indígena era de 500 personas. Como consecuencia de su integración con otras comunidades, la población ascendió a 4000 personas. Suponiendo que la población crece en forma lineal:

a) expresar mediante una fórmula la cantidad de habitantes en función del tiempo;
b) indicar aproximadamente cuándo llegará la población a 10000 habitantes;
c) realizar un gráfico cartesiano de la situación.

Ejercicio 13: Dada la recta de ecuación $a\,x + b\,y = 1$, determinar a y b sabiendo que la recta dada es perpendicular a la recta de ecuación $2\,x + 4\,y = 11$ y que pasa por el punto $P\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Ejercicio 14: La recta $y + 2 = m.(x + 3)$ pasa por el punto intersección de las rectas $2x - 3y + 5 = 0$ y $5x - 2y - 15 = 0$. Calcular el valor de m.

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Ya hemos visto en la primera unidad cómo calcular el valor absoluto de un número real. Como cada número real posee un solo valor absoluto, podemos pensar esta relación como una función.

Para graficar la función valor absoluto haremos uso de las rectas que hemos estado estudiando hasta ahora.

Si consideramos la función donde a cada número real le corresponde su valor absoluto, es decir:

$$f(2) = 2$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}$$

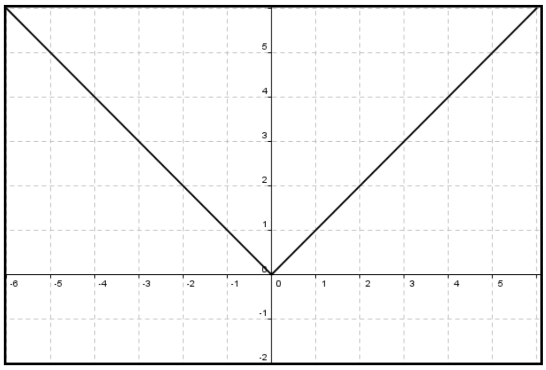
observamos que los puntos que determinan su gráfica son

- puntos que pertenecen a la recta $y = x$ para los $x \geq 0$ y
- puntos que pertenecen a la recta $y = -x$ para los $x < 0$.

Podemos definir la función valor absoluto mediante la formula

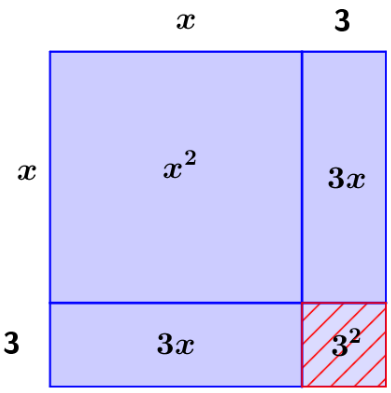
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función $f(x) = |x|$



ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO

El recorrido en la historia del álgebra y la resolución de ecuaciones nos remite a India, Babilonia y los países de lengua árabe, en la época de la Edad Media europea, entre los siglos V y XV a.C. En ese entonces, los problemas algebraicos se planteaban mediante representaciones geométricas, en lugar de las expresiones a las que estamos habituados en la actualidad. Un ejemplo es el siguiente cuadrado dividido en 4 partes, donde:



Lado del cuadrado: $x+3$

Área del cuadrado = (lado)² = $(x+3)^2$ (1)

Asimismo, sumando las áreas de cada una de las cuatro partes:

Área del cuadrado = $x^2 + 2.(3x) + (3^2)$

$= x^2 + 6x + 9$ (2)

Las expresiones (1) y (2) consisten en dos maneras diferentes de escribir el área del cuadrado grande.

Entonces, igualando las mismas, si (1) = (2):

$$\boxed{(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9}$$

¿Te resulta conocida una igualdad como ésta?...

Las expresiones algebraicas trabajadas en el ejemplo integran una ecuación cuadrática o de segundo grado:

Definición:

¡Para leer y recordar!

Una ecuación de segundo grado con una incógnita,

es una ecuación equivalente a una de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

... con a, b, $c \in$ R y $a \neq 0$.

- ✓ ***a*** se denomina **coeficiente cuadrático**;
- ✓ ***b*** es el **coeficiente lineal** y
- ✓ ***c*** es el **término** independiente.
- \- Esta definición también es conocida como *forma polinómica* de la ecuación cuadrática.

Ejemplo: $x^2 - 100 = 21$

Para reconocer los valores de los coeficientes, igualamos a cero el miembro derecho de la igualdad:

$x^2 - 121 = 0$ ... con lo cual, podemos afirmar que en esta ecuación: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -121 \end{cases}$

Ejercicio 1:

a) ¿Por qué, en la definición de ecuación de segundo grado, es necesario que *a* sea distinto de cero?

b) Identificar los coeficientes de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

Ecuación	*a*	*b*	*c*
$3x^2 + 9 = 9$			
$x^2 + 9 = 0$			
$7x\,(x - 20) = 0$			
$2\,x^2 = -\,6x$			
$2\,(x^2 - 4) = 6x$			

Clasificación de las Ecuaciones de Segundo Grado con una incógnita

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita se clasifican, según los valores de sus coeficientes y término independiente, en **completas** o **incompletas.**

¡Para leer y recordar!

Definición:

- Una ecuación cuadrática es ***incompleta*** si ***b = 0*** *ó* ***c = 0***.

  Se tienen las siguientes posibilidades de ecuaciones cuadráticas incompletas:

  ✓ $a\,x^2 + b\,x = 0$ con $b \neq 0$, $c = 0$.

  ✓ $a\,x^2 + c = 0$ *con* $b = 0$, $c \neq 0$.

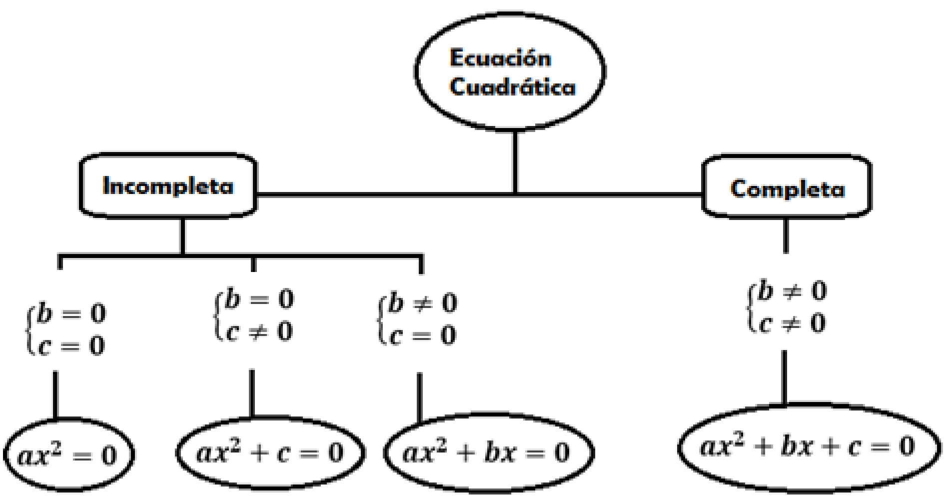
  ✓ $a\,x^2 = 0$ con $b = 0$, $c = 0$.

- Una ecuación cuadrática es ***completa*** si $\boldsymbol{b \neq 0}$ y $\boldsymbol{c \neq 0}$.

  La única expresión de una ecuación cuadrática completa es:

  ✓ $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

Podemos visualizar esta clasificación en el siguiente diagrama:



Ejercicio 2: Escribr un ejemplo para cada tipo de ecuación cuadrática, guiándote por el diagrama.

Resolución de Ecuaciones de Segundo Grado con una incógnita

Toda ecuación de segundo grado con una incógnita tiene dos **soluciones**, también llamadas **raíces**, que denotaremos $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$.

Resolver una ecuación de este tipo implica encontrar sus soluciones x_1 y x_2.

En este apartado abordaremos cada uno de los tipos de ecuación de cuadrática y su resolución.

Resolución de Ecuaciones Incompletas

Tipo de Ecuación Cuadrática:	*Resolución:*	*Ejemplo:*
Incompleta del tipo: $\boldsymbol{a\,x^2 = 0}$	Se despeja la incógnita y se llega a la solución: $\boldsymbol{x_1 = x_2 = 0}$	$\mathbf{3x^2 + 9 = 9}$ $3x^2 = 9 - 9$ $3x^2 = 0$ ... luego : $x_1 = x_2 = 0$

.

Tipo de Ecuación Cuadrática:	*Resolución:*	*Ejemplo 1:*	*Ejemplo 2:*
Incompleta del tipo: $\boldsymbol{a\,x^2 + c = 0}$	Se despeja la incógnita teniendo en cuenta que $\sqrt{\boldsymbol{x^2}} = \lvert\boldsymbol{x}\rvert$	$\boldsymbol{x^2 + 9 = 0}$ $x^2 = -9$ $\lvert x\rvert = \sqrt{-9}$ Soluciones: $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 3i} \\ \boldsymbol{x_2 = -3i} \end{cases}$	$\boldsymbol{-\frac{3}{2}x^2 + 27 = 0}$ $-\frac{3}{2}x^2 = -27$ $-3x^2 = -54$ $x^2 = 18$ $\lvert x\rvert = \sqrt{18}$ Soluciones: $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = \sqrt{18}} \\ \boldsymbol{x_2 = -\sqrt{18}} \end{cases}$

Ejercicio 3: Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas:

a) $x^2 - 16 = 0$ b) $2x^2 - 50 = 0$ c) $\frac{1}{5}x^2 - 5 = 0$ d) $2x^2 = 3x^2 + 36$

Tipo de Ecuación Cuadrática:	*Resolución:*	*Ejemplo 1:*	*Ejemplo 2:*
Incompleta del tipo: **$a\,x^2$ + bx = 0**	Se aplica la **Extracción de Factor Común:** $a\,x^2$ + bx = 0 x . (ax + b) = 0 Recordar que si $\boldsymbol{m\,.n=0}$ …entonces $\boldsymbol{m=0}$ ó $\boldsymbol{n=0}$	$\boldsymbol{7x^2-140x=0}$ $7x\,.(x-20)=0$ $7x=0$ ó $x-20=0$ De cada una de estas ecuaciones se obtiene una solución. Soluciones: $\begin{cases}\boldsymbol{x_1=0}\\ \boldsymbol{x_2=20}\end{cases}$	$\boldsymbol{2x^2=-\frac{2}{3}x}$ $2x^2+\frac{2}{3}x=0$ $\boldsymbol{2.}\,x\,.\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2.}\frac{1}{3}.\boldsymbol{x}=0$ $\boldsymbol{2x}\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$ $2x=0$ ó $x+\frac{1}{3}=0$ Soluciones: $\begin{cases}\boldsymbol{x_1=0}\\ \boldsymbol{x_2=-6}\end{cases}$

Ejercicio 4: Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas:

a) $-5x^2+x=0$ b) $\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}x=0$ c) $\frac{1}{2}x^2=4x$ d) $-x^2-\frac{1}{2}x=0$

¡Para leer y recordar!

Toda ecuación de segundo grado puede expresarse como producto de factores una vez conocidas sus soluciones, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{a\,(x - x_1)(x - x_2) = 0}$$

Esta expresión se denomina: ***forma factorizada*** de la ecuación cuadrática.

Ejemplos: Se muestra la forma factorizada de algunas de las ecuaciones dadas en los ejemplos anteriores:

Ecuación cuadrática	***Soluciones***	***Forma Factorizada***
$x^2+9=0$	$\begin{cases}x_1=3i\\ x_2=-3i\end{cases}$	$\boldsymbol{(x-3i)(x+3i)=0}$
$-\frac{3}{2}x^2+27=0$	$\begin{cases}x_1=\sqrt{18}\\ x_2=-\sqrt{18}\end{cases}$	$\boldsymbol{-\frac{3}{2}\left(x-\sqrt{18}\right)\left(x+\sqrt{18}\right)=0}$
$7x^2-140x=0$	$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=20\end{cases}$	$\boldsymbol{7x\,(x-20)=0}$
$2x^2+\frac{2}{3}x=0$	$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-6\end{cases}$	$\boldsymbol{2x\,(x+6)=0}$

Ejercicio 5: Expresar en su forma factorizada a las ecuaciones cuadráticas resueltas en los ejercicios 3 y 4.

Ejercicio 6: i) Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

ii) Escribir la forma factorizada de cada ecuación.

a) $x^2 + 11 = 0$

b) $4x^2 - 9 = 0$

c) $-2x^2 - \frac{1}{2}x = 0$

d) $8x^2 + 16x = 0$

e) $\frac{x^2-1}{6} = 4$

f) $3x^2 - 4x = 12x + x^2$

Ejercicio 7: Resolver los siguientes problemas planteando ecuaciones cuadráticas incompletas.

a) La diferencia entre un número positivo y la mitad de su cuadrado es 0. ¿De qué número se trata?

b) El anterior del doble del cuadrado de un número positivo es 7. ¿Qué números verifican esta igualdad?

c) El producto de un número negativo por su tercera parte es 27. Calcular dicho número.

d) Hallar los números reales tales que el doble de su cuadrado más la mitad de su triple es igual a 0.

Resolución de Ecuaciones Completas

Las *soluciones* x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado completa se obtienen a través de la conocida ***fórmula de Bhaskara*** reemplazando los coeficientes *a* , *b* , *c* en las siguientes expresiones: $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Escribimos, en forma abreviada: $x_1, x_2 = \boxed{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

Ejemplo 1:

Resolveremos la ecuación cuadrática completa: $\mathbf{2x^2 - 6x - 8 = 0}$ cuyos coeficientes son $\begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = -8 \end{cases}$

Recordemos que, al ser completa la ecuación cuadrática, todos sus coeficientes son distintos de cero.

Aplicamos la fórmula de Bhaskara: $x_1, x_2 = \dfrac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\,.\,2\,.(-8)}}{2\,.\,2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{4}$$

$$x_1, x_2 = \frac{6 \pm 10}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{6+10}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ x_2 = \frac{6-10}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Luego las soluciones son: $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 4} \\ \boldsymbol{x_2 = -\frac{3}{2}} \end{cases}$

Ejemplo 2:

Obtendremos las soluciones de la ecuación cuadrática $\boldsymbol{-x^2 - x = 5 - \frac{x+1}{2}}$

Primero, realizamos los pasos algebraicos necesarios para identificar sus coeficientes.

$$\boldsymbol{-x^2 - x = 5 - \frac{x+1}{2}}$$

$$-x^2 - x = \frac{10 - (x+1)}{2}$$

$$2(-x^2 - x) = 10 - (x+1)$$

$$-2x^2 - 2x = 10 - x - 1$$

$$-2x^2 - 2x + x + 1 - 10 = 0$$

$$-2x^2 - x - 9 = 0$$

$$(-1)(2x^2 + x + 9) = 0$$

$$\boxed{2x^2 + x + 9 = 0}$$

Donde podemos reconocer a *a* = ……, *b* = ……, *c* = ……

Aplicando la fórmula de Bhaskara, las soluciones son: $x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{71}}{4}i$ y $x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{71}}{4}i$

Ejercicio 8: i) Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas completas.

ii) Escribir su forma factorizada.

a) $2x^2 + 4x + 2 = 0$ b) $2x^2 + x - 3 = 0$ c) $x^2 + x - 6 = 0$

d) $x + x^2 + 1 = 0$ e) $(x+2)^2 = x + 2$ f) $\sqrt{x^2 + 3x + 7} = 5$

El siguiente ejemplo muestra cómo resolver problemas que implican plantear ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo:

La suma del área de un cuadrado más su perímetro es 60. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

- Si llamamos x a la longitud del lado del cuadrado, su área es x^2 y su perímetro es $4x$.
- La suma del área del cuadrado más su perímetro es 60, es decir: $x^2 + 4x = 60$

- Resolvemos la ecuación $x^2 + 4x - 60 = 0$.

- Obtenemos que las raíces son $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{256}}{2} = \dfrac{-4 \pm 16}{2}$

  Así, las soluciones de la ecuación son $x_1 = 6$ y $x_2 = -10$

Ambas soluciones verifican la ecuación, pero únicamente $x_1 = 6$ es solución del problema pues la longitud no puede ser negativa.

Ejercicio 9: Resolver los siguientes problemas planteando ecuaciones cuadráticas completas.

a) Sabiendo que x =2 es una solución de $x^2 - 3x + k = 0$, determinar el valor de k.

b) Si x = 3 es una de las soluciones de $x^2 - kx + 6 = 0$, ¿Cuánto vale k?

c) La suma de un número positivo y su cuadrado es 42. Hallar dicho número.

d) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 5. Encontrar dichos números.

e) Determinar las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su área es 405 cm^2 y su perímetro 84 cm.

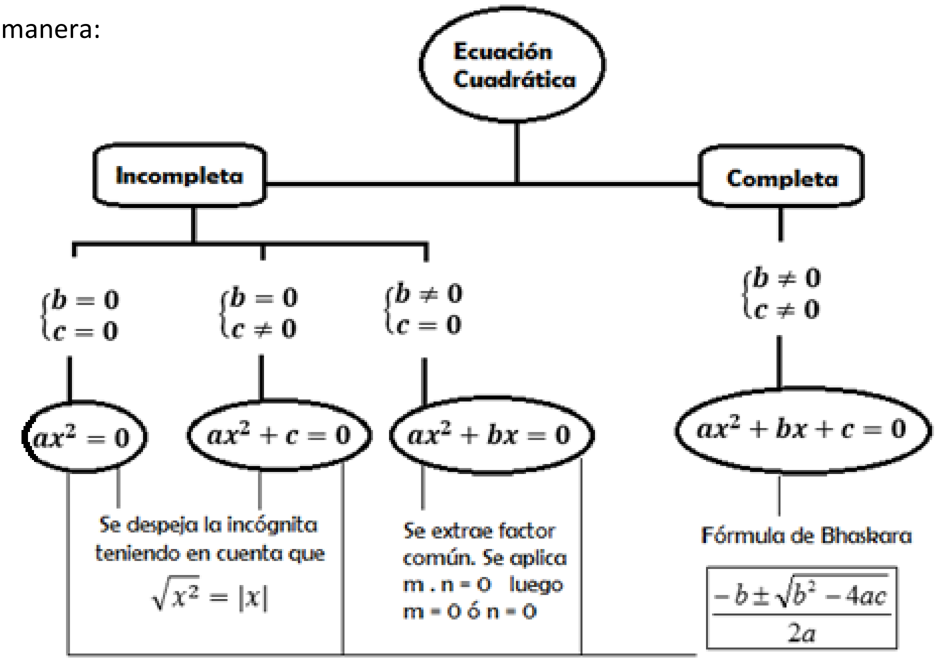
f) Encontrar dos números consecutivos cuyo producto es 380.

g) Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de ancho uniforme. Hallar el ancho de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2.

La fórmula de Bhaskara, presentada en este módulo como el método de resolución de las ecuaciones cuadráticas completas, puede aplicarse también al resolver ecuaciones de segundo grado incompletas.

Es un método general.

Así, el diagrama que clasifica las ecuaciones de segundo grado se completa con las maneras de resolverlas, de la siguiente manera:



Ejercicio 10: i) Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado.

ii) Escribir su forma factorizada.

a) $-x^2 + 4x - 7 = 0$ b) $(x+3)^2 = 9$ c) $(x-5)(x+1) + 5 = 0$

d) $(x-2)^2 = -4x + 2x^2$ e) $\frac{x^2-3x}{2} - 5 = \frac{x-20}{4}$ f) $(3x+2)(3x-2) = 77$

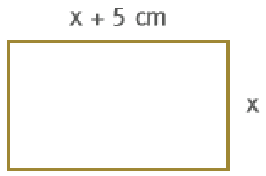
g) $-3(x+1)^2 = -12$ h) $2x(x-1) - 3 = x - 3x - 2$ i) $x.(4-x) = 5$

Ejercicio 11: Resolver las siguientes ecuaciones, sustituyendo convenientemente la expresión $u = x^2$.

a) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$ b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ c) $\sqrt{2x^2+1} = x^2 - 1$

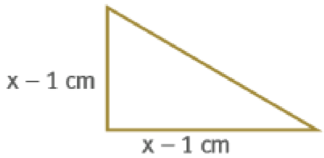
Ejercicio 12: Calcular el perímetro de las figuras, sabiendo que el área de cada una es igual a 14 cm^2.

a)

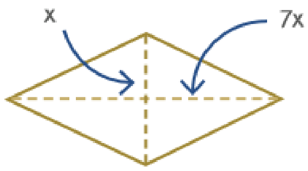


b)

c)



d)



Ejercicio 13: Resolver los siguientes problemas que implican el planteo de ecuaciones cuadráticas.

a) Dentro de 11 años, la edad de Marcela será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcular la edad actual de Marcela.

b) En cada esquina de una plancha de cartón cuadrada, se recorta un cuadrado de 5 cm de lado. Doblando hacia arriba las solapas generadas, se forma una caja cuyo volumen es de 1280 cm^3. Hallar el lado de la plancha de cartón antes de ser recortada.

c) Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida, en cm, tres números pares consecutivos. Hallar los valores de dichos lados.

d) Un poste de luz de 7 metros se rompe a una cierta altura del suelo y al doblarse, la punta libre del trozo roto cae a 3 m de la base del poste. ¿A qué altura se rompió?

El Discriminante

Recordemos la fórmula de Bhaskara: $x_1, x_2 = \boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

La expresión $b^2 - 4ac$ del radicando, se llama ***discriminante*** y se simboliza con la letra griega Δ.

El discriminante permite clasificar las soluciones de una ecuación de segundo grado:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos **raíces reales y distintas.**
- Cuando $\Delta < 0$, la ecuación no tiene raíces reales; tiene dos **raíces complejas conjugadas**.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real; diremos que es una ***raíz doble***.

Ejercicio 14: Sin resolverlas, indicar el tipo de solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $\boldsymbol{x^2 - 2x + 1 = 0}$ b) $\boldsymbol{6 + x^2 = 0}$ c) $\boldsymbol{-x^2 + 2 - x = 0}$

d) $\boldsymbol{x^2 + 2x = -3}$ e) $\boldsymbol{(2x-1)^2 = 0}$ f) $\boldsymbol{9 - x^2 = 0}$

A continuación, se muestran ejemplos donde se verifican los tipos de solución en función del discriminante:

$$\boldsymbol{x^2 - 5x + 6 = 0}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6$

$\Delta = 1$

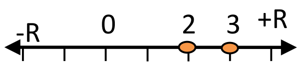
$\boldsymbol{\Delta > 0}$

Cuando $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos **raíces reales y distintas.**

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$x_1 = 3$, $x_2 = 2$



$$\boldsymbol{x^2 - 2x + 5 = 0}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4.1.5$

$\Delta = -16$

$\boldsymbol{\Delta < 0}$

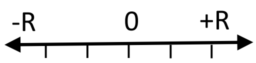
Cuando $\Delta < 0$, la ecuación no tiene raíces reales; tiene dos **raíces complejas conjugadas**.

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

$x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$



$$\boldsymbol{9x^2 + 6x + 1 = 0}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (6)^2 - 4.9.1$

$\boldsymbol{\Delta = 0}$

Cuando $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real; diremos que es una ***raíz doble***.

$$_{1,} x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$x_1 = -3$, $x_2 = -3$

El discriminante también se aplica en la resolución de situaciones problemáticas:

Ejemplo: Dada la ecuación $x^2 - 12x + c = 0$, queremos hallar los valores de c para que las dos raíces de la ecuación sean reales y distintas. Entonces: $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-12)^2 - 4c$ $\Delta = 144 - 4c$.

El valor del discriminante en este caso es $\Delta = 144 - 4c$

Para que las dos raíces sean reales y distintas, debe ocurrir que el discriminante sea mayor que cero.

Luego 144 – 4c > 0, es decir, c > 36.

De este modo, x^2 - 12 x + 39 es un ejemplo del tipo de ecuación que se pide.

Ejercicio 15: Resolver los siguientes problemas aplicando el discriminante:

a) Dada la ecuación $x^2 - (m + 2)\, x + 10 = 0$, hallar los valores de m para que las dos soluciones de dicha ecuación sean iguales.

b) ¿Qué valores debe tomar w para que la ecuación $2x^2 – x – w = 0$ no tenga raíces reales?

c) Hallar los posibles valores de k para que la ecuación $k\, x^2 – x – 1 = 0$ tenga dos soluciones reales y distintas.

Completar Cuadrados

El procedimiento de Completar Cuadrados proporciona otra manera de resolver y de expresar ecuaciones de segundo grado. Recordemos el ejemplo dado en la primera página de este módulo:

$$(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{x}+\mathbf{9}$$

Recordemos asimismo, que ambos miembros de esta igualdad muestran dos maneras diferentes de escribir el área de un cuadrado de lado igual a: $\boldsymbol{x}+\mathbf{3}$.

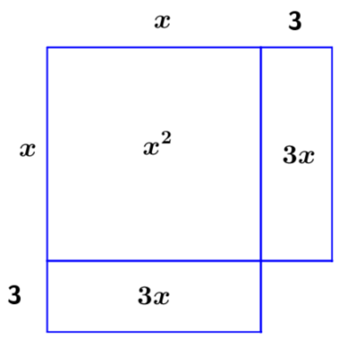
Supongamos ahora, que sólo tenemos los siguientes términos que integran esta igualdad: $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{x}$

Geométricamente,

representamos estos términos como:

- un cuadrado de área: $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$
- y dos rectángulos, cada uno de área igual a $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$:

$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{2}.(\mathbf{3}\boldsymbol{x})$ =
$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{x}$



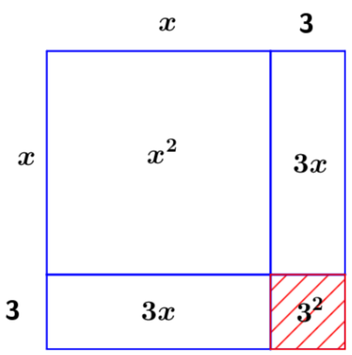
¿Qué "falta" sumar a esta expresión para ***completar el cuadrado*** *de lado igual a* $\boldsymbol{x}+\mathbf{3}$*?*

Respuesta:

De lo trabajado en la situación inicial de este módulo,

sabemos que sumando 9 logramos "completar el cuadrado", porque

$$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{x}+\mathbf{9}=(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{2}}$$



En otras palabras: se suma el valor del área del cuadrado rayado en la figura, que en este caso es $\mathbf{3}^{\mathbf{2}}=\mathbf{9}$.

Observemos asimismo que $\mathbf{9}=\mathbf{3}^{\mathbf{2}}=\left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}$

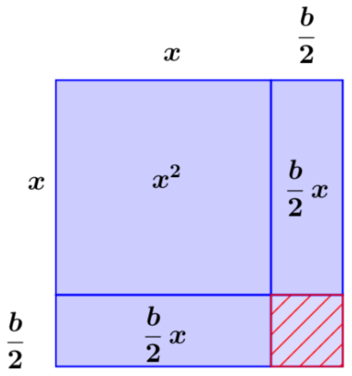
En general: Cómo Completar Cuadrados [1]

Para hacer que $\boldsymbol{x}^2 + b\boldsymbol{x}$ "*complete el cuadrado*", se suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

es decir, la mitad del coeficiente que acompaña al término $\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{x}^2 + b\boldsymbol{x} + \left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)^2 = \left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)^2$$

Notemos que, en esta expresión cuadrática, $a = 1$.



Cómo resolver ecuaciones cuadráticas Completando Cuadrados

Ejemplo 1:

$\boldsymbol{x^2 - 8x + 13 = 0}$	*Ecuación dada*
$\boldsymbol{x^2 - 8x = -13}$	*Resta 13 miembro a miembro (m.a.m)*
$\boldsymbol{x^2 - 8x + 16 = -13 + 16}$	*Completa el cuadrado: suma m.a.m* $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = \boldsymbol{16}$
$\boldsymbol{(x-4)^2 = 3}$	
$\boldsymbol{\lvert x-4\rvert = \sqrt{3}}$	*Aplica raíz cuadrada m.a.m*
$\boldsymbol{x_1 = 4 + \sqrt{3}}$; $\boldsymbol{x_2 = 4 - \sqrt{3}}$	*Soluciones*

Ejemplo 2: Se trata de un caso donde $\boldsymbol{a \neq 1}$

$\boldsymbol{3x^2 + 12x - 6 = 0}$	*Ecuación dada*
$\boldsymbol{3(x^2 + 4x - 2) = 0}$	***Extrae factor común: a*** *(en este caso, a = 3)*
$\boldsymbol{x^2 + 4x - 2 = 0}$	*Divide m.a.m por a*
$\boldsymbol{x^2 + 4x = 2}$	*Resta 2 m.a.m*
$\boldsymbol{x^2 + 4x + 4 = 2 + 4}$	*Completa el cuadrado: suma m.am* $\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = \boldsymbol{4}$
$\boldsymbol{(x+2)^2 = 6}$	
$\boldsymbol{\lvert x+2\rvert = \sqrt{6}}$	*Aplica raíz cuadrada m.a.m.*
$\boldsymbol{x_1 = -2 + \sqrt{6}}$; $\boldsymbol{x_2 = -2 - \sqrt{6}}$	*Soluciones*

Ejercicio 16: Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas completando cuadrados.

a) $\boldsymbol{x^2 - 6x - 16 = 0}$ b) $\boldsymbol{x^2 + 2x = 3}$ c) $\boldsymbol{x^2 - 4x + 2 = 0}$ d) $\boldsymbol{x^2 + 3x = \frac{7}{4}}$

e) $\boldsymbol{3x^2 - 6x - 1 = 0}$ f) $\boldsymbol{-x^2 - 3x - 1 = 0}$ g) $\boldsymbol{4x^2 - x = 0}$ h) $\boldsymbol{x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}}$

[1] Extraído de: Stewart, J. y otros. (2012) Precálculo, Matemáticas para el cálculo. Cengage Learning, p.48.

¡Para leer y recordar!

Toda ecuación de segundo grado puede expresarse de la siguiente manera, siendo *h, k* números reales:

$$a\,(x - h)^2 + k = 0$$

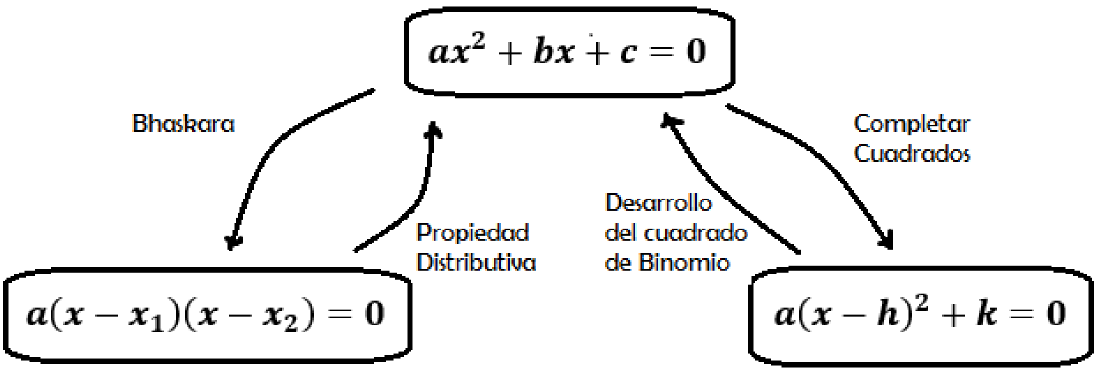
Esta expresión se denomina: ***forma canónica*** de la ecuación cuadrática.

Ejemplos: Se muestran a continuación las formas canónicas de las ecuaciones resueltas completando cuadrados en los ejemplos.

Ecuación dada	***Forma canónica*** *(luego de completar cuadrados)*
$x^2 - 8x + 13 = 0$	$(x - 4)^2 - 3 = 0$
$3x^2 - 12x + 6 = 0$	$(x + 2)^2 - 6 = 0$

Ejercicio 17: Expresar las ecuaciones cuadráticas del ejercicio 16 en su forma canónica.

Para cerrar este módulo, en el siguiente diagrama se muestran las tres formas de expresar una ecuación cuadrática: forma polinómica, forma factorizada y forma canónica; junto con los métodos para obtenerlas.



FUNCIÓN CUADRÁTICA

Las funciones cuadráticas permiten modelizar situaciones referidas a distintas áreas del conocimiento, desde tiempos remotos. En la Antigüedad, los griegos las trabajaban en un método geométrico que involucraba la representación de cuadrados y rectángulos.

En el siglo XVII, luego de que Johannes Kepler (1571 – 1630) expusiera las leyes que rigen los movimientos de los planetas, los astrónomos descubrieron que las órbitas de planetas y cometas respondían a modelos cuadráticos. Actualmente, las funciones cuadráticas modelizan situaciones en el campo de la Física, la Biología, la Economía, la Astronomía, la Comunicación y la Geometría, entre otros. [2]

¡Para leer y recordar!

Definición:

Llamamos ***función cuadrática*** o de segundo grado a toda función de la forma

$$\boldsymbol{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$$

... con $a, b, c \in \mathrm{R}$ y $a \neq 0$.

- El **dominio** de esta función es el conjunto de los números reales: $\boldsymbol{R}$
- La expresión aquí definida se denomina ***forma polinómica*** de la función cuadrática.

  En ella, cada término tiene un nombre:
  - $\boldsymbol{ax^2}$ se denomina término cuadrático
  - $\boldsymbol{bx}$ es el término lineal
  - $\boldsymbol{c}$ es el término independiente.

Representación Gráfica y Elementos de una Función Cuadrática

La **representación gráfica** de una función cuadrática es una curva llamada **parábola**.

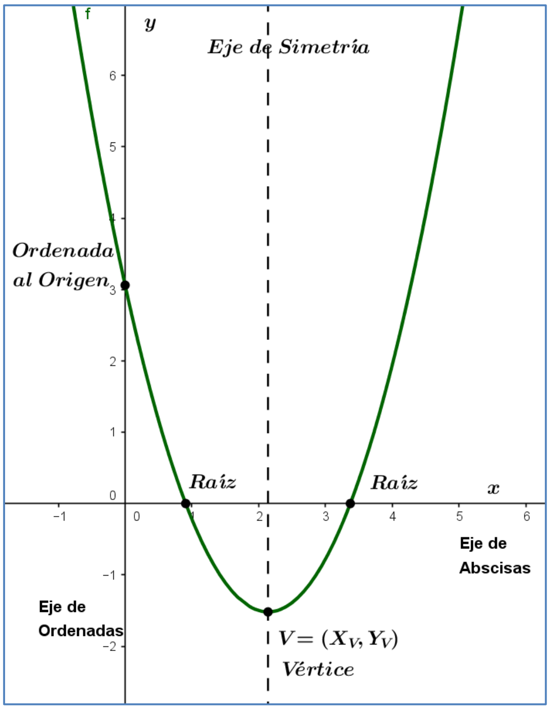
En ella, identificamos los siguientes elementos de toda función cuadrática:

- Las **raíces** son los puntos donde la función intersecta al eje de abscisas (*eje x*).
- La **ordenada al origen** es el punto donde la función intersecta al eje de ordenadas (*eje y*).

  Coincide con el término independiente en la forma polinómica de la ecuación cuadrática: o. o = (0, c)
- El **vértice** es el punto donde la función alcanza un extremo: puede ser un máximo o un mínimo.
- El **eje de simetría** es una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje de ordenadas.

[2] Camuyrano, M. y otros (2000). Matemática I. Modelos matemáticos para interpretar la realidad.

A continuación, presentamos la parábola: es decir, la curva que representa una función cuadrática.

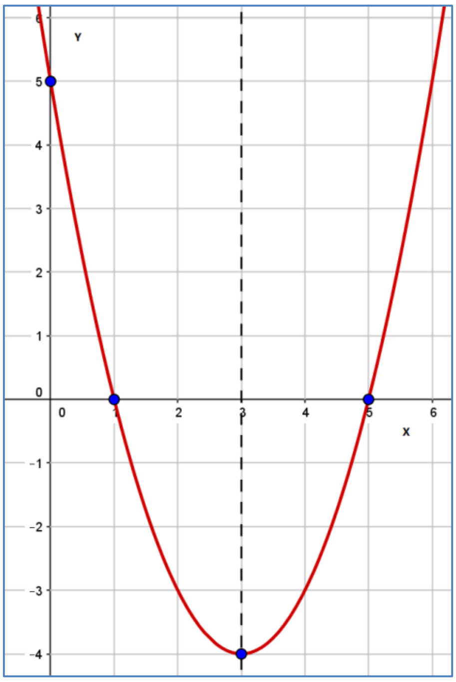


Más información en la Representación Gráfica de la Función Cuadrática...

Es posible, además de los elementos ya identificados, "leer" más información en la parábola que representa gráficamente a una función cuadrática. Lo mostraremos a través de los ejemplos siguientes.

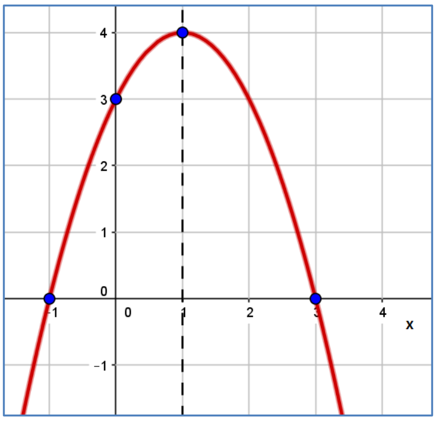
Ejemplo 1: Se tiene la siguiente gráfica de una función cuadrática *f*, donde es posible identificar:

- Conjunto Dominio de *f* (Dom *f*): $\mathbb{R}$
- Conjunto Imagen de f (Im f) : $[-4, +\infty)$
- Ordenada al origen (o.o) : (0,5)
- Raíces: (1,0) y (5,0)
- Conjunto de Positividad C $^{+}$: $(-\infty, 1) U (5, +\infty)$
- Conjunto de Negatividad C $^{-}$: $(1,3)$
- Eje de Simetría: $x = 3$
- Vértice V: (3, - 4) en este caso es un mínimo
- Intervalo de Decrecimiento IC: $(-\infty, 3)$
- Intervalo de Crecimiento ID: $(3, +\infty)$

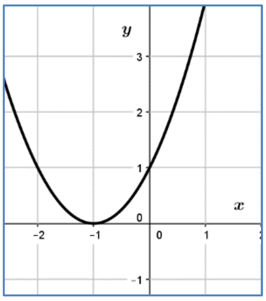


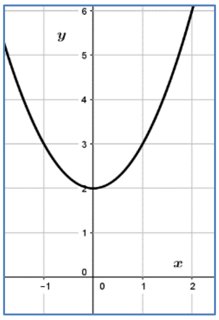
Ejemplo 2: En esta gráfica de otra función cuadrática g, es posible identificar:

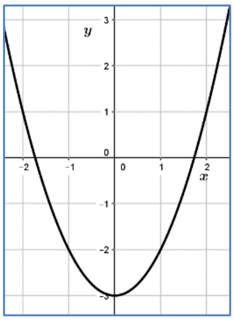
- Conjunto Dominio de f (Dom f): $\mathbb{R}$
- Conjunto Imagen de f (Im f) : $(-\infty, 4]$
- Ordenada al origen (o.o) : (0,3)
- Raíces: (-1,0) y (3,0)
- Conjunto de Positividad C$^+$: $(-1,3)$
- Conjunto de Negatividad C$^-$: $(-\infty,-1)U(3,+\infty)$
- Eje de Simetría: $x = 1$
- Vértice V: (1, 4) en este caso es un máximo
- Intervalo de Decrecimiento IC: $(1,+\infty)$
- Intervalo de Crecimiento ID: $(-\infty, 1)$

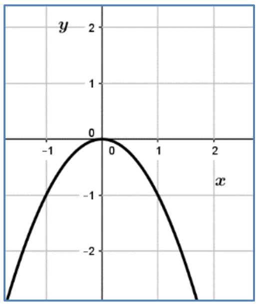


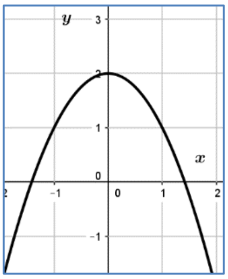
Ejercicio 1: A partir de las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas, identificar: Dominio, Imagen, o.o, raíces, conjunto de positividad, conjunto de negatividad, eje de simetría, vértice, IC, ID.

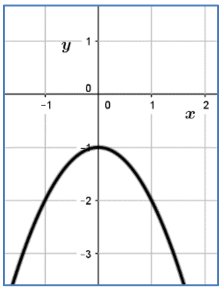
a) 

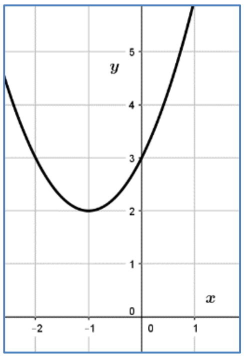
b) 

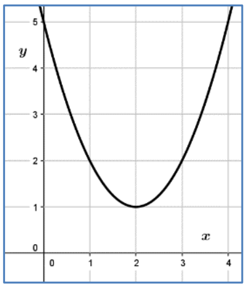
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

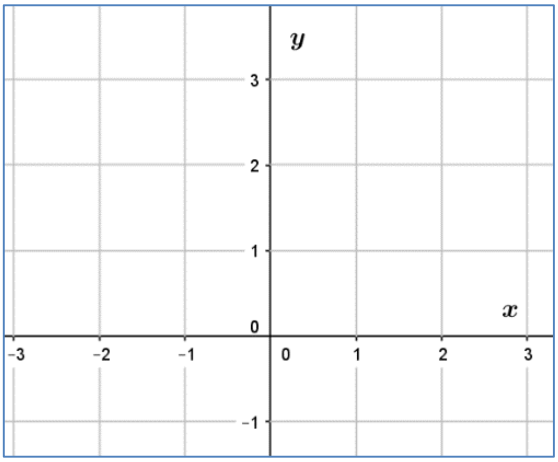
La Función Cuadrática Elemental : $y = x^2$

La función $y = f(x) = x^2$ es llamada **Función Cuadrática Elemental**. Vamos a analizarla:

- ✓ Sabemos que su dominio es Dom f : $\mathbb{R}$.
- ✓ Identifica sus coeficientes: $a =$ ……, $b =$……. , $c =$ ………
- ✓ Para graficarla, completa la siguiente tabla, marca los puntos de la misma en los ejes coordenados y traza en el sistema de coordenadas proporcionado, la parábola que los contiene:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$							

- ✓ Como el cuadrado de todo número real es *no negativo*, entonces Im f: …………….
- ✓ o.o = raíz = V = ……………
- ✓ Eje de simetría: …………
- ✓ Conjunto de Positividad C^+: …………
- ✓ Conjunto de Negatividad C^-: …………
- ✓ Intervalo de Decrecimiento IC: ………..
- ✓ Intervalo de Crecimiento ID: ……….



Observa en particular, los puntos (-1, 0) y (1,0). Ambos pertenecen a la función cuadrática elemental, y tienen la misma imagen. Gráficamente, en la parábola se encuentran a la misma distancia del eje de simetría. En general, definimos:

Dos puntos que pertenecen a una función cuadrática f(x) y que equidistan del eje de simetría de f(x), tienen la misma imagen y se denominan **puntos simétricos**.

Ejercicio 2: Considerando la función elemental $f(x) = x^2$:

i) Calcular: a) $f(-4)$ b) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ c) $f(\sqrt{7})$

ii) Indicar, si es posible, los valores de x para los cuales:

a) f(x) = 100 b) f(x) = 5 c) f(x) = - 4 d) f(x) = f(5)

iii) Identifica dos pares de puntos simétricos en f(x).

Ejercicio 3: Para cada una de las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = -2x^2 + 4x$ $h(x) = x^2 - 2x + 1$

$m(x) = -x^2 + 2x - 3$ $t(x) = x^2 + x - 6$ $s(x) = -\frac{1}{4}x^2$

a) Indicar los valores de los coeficientes *a, b* y *c.*

b) Confeccionar una tabla de valores con al menos cinco puntos, y al menos un par de puntos simétricos.

c) Graficar las parábolas que las representan.

Ejercicio 4:

a) ¿Cuál es el único punto de una parábola que es simétrico a sí mismo con respecto al eje de simetría?

b) Si el eje de simetría de una parábola fuera *y* = 3, ¿podríamos decir que dicha curva representa una función cuadrática? Justificar tu respuesta.

c) Una parábola pasa por los puntos simétricos (-1, 3) y (-5, 3). Escribir la ecuación de su eje de simetría.

Variación del coeficiente "*a*" en la Función Cuadrática

Vamos a estudiar las distintas curvas que se obtienen cuando varía el coeficiente cuadrático "*a*".

Observa los respectivos gráficos de las funciones f(x), t(x), s(x), p(x) y k(x) y completa los espacios en blanco:

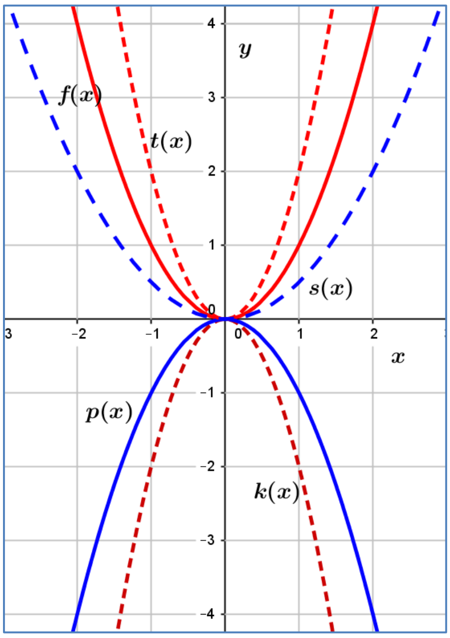
$f(x) = x^2$ $\qquad a =$ ....

$t(x) = 2x^2$ $\qquad a =$ ....

$s(x) =$ ..... x^2 $\qquad a = \frac{1}{2}$

$p(x) = -x^2$ $\qquad a =$ ....

$k(x) = -2x^2$ $\qquad a = -2$



Escribe tus conclusiones en el siguiente cuadro:

¡Para leer y recordar!

✓ El ***signo*** de ***a*** indica hacia dónde se dirigen las ramas de las parábolas:

- Si a es positivo, las ramas van hacia .... y el vértice es un ***mínimo***.
- Si a es negativo, las ramas van hacia ***abajo*** y el vértice es un ....

✓ El ***valor absoluto*** de ***a*** modifica la abertura de las parábolas:

- Cuanto ***menor*** es $|a|$, la parábola es más abierta
- Cuanto ***mayor*** es $|a|$, la parábola es más ....

Ejercicio 5: Considerar las funciones $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = -\frac{1}{5}x^2$, y para cada una de ellas:

a) Indicar los valores de los coeficientes *a, b* y *c.*

b) Indicar, sin graficarlas, hacia dónde se dirigen las ramas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y si el vértice es un máximo o un mínimo.

Ejercicio 6: Dadas las parábolas: I) $y = 2x^2$ II) $y = 2x^2 - 3$ III) $y = -1/2\, x^2 - x + 1$ IV) $y = 5(x + 2)^2$

a) ¿Cuál es la única parábola cuyas ramas se abren hacia abajo?

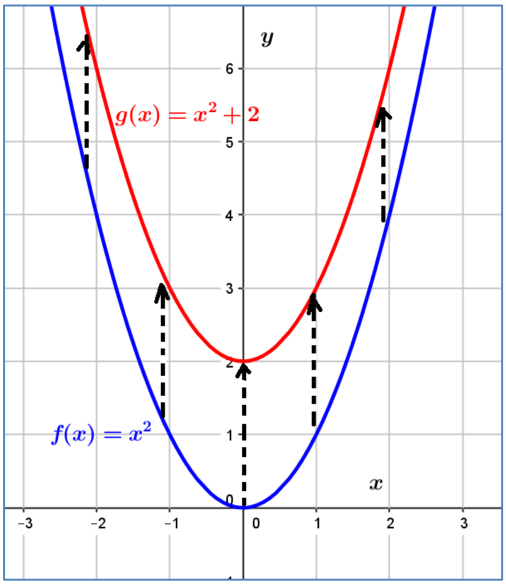
b) ¿Cuáles tienen igual abertura?

c) ¿Cuál es la más cerrada?

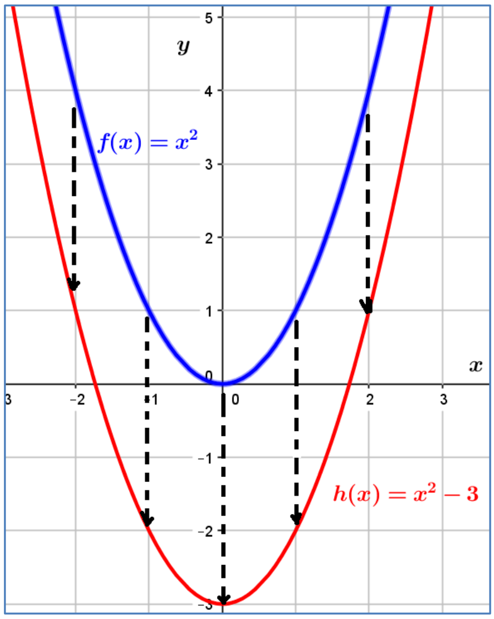
Desplazamiento Vertical de la Función Cuadrática

En este apartado, estudiaremos cómo se modifican la representación gráfica, la expresión algebraica y las propiedades de la función elemental $f(x) = x^2$ al desplazar la misma en forma vertical.

Si trasladamos la gráfica de f(x) dos unidades hacia arriba, obtendremos la gráfica de la función $g(x) = x^2 + 2$.



Si ahora trasladamos la gráfica de f(x) tres unidades hacia abajo, obtendremos la gráfica de la función $h(x) = x^2 - 3$.



Ejercicio 7: Completar la siguiente tabla teniendo en cuenta las funciones mostradas anteriormente:

	$y = x^2$	$y = x^2 + 2$	$y = x^2 - 3$
Ordenada al Origen			
Vértice V : (Xv, Yv)			
Conjunto Imagen : Im f			
Eje de Simetría			
Intervalo de Crecimiento			
Intervalo de Decrecimiento			
Raíces			
Conjunto de Positividad			
Conjunto de Negatividad			

El desplazamiento vertical de una función cuadrática:

- ✓ Deja invariantes el eje de simetría, la abscisa del vértice (Xv) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- ✓ Modifica las raíces y ordenada al origen, los conjuntos de positividad y negatividad, la ordenada del vértice (Yv) y el conjunto Imagen.

Ejercicio 8: Dados los siguientes desplazamientos verticales de la función cuadrática elemental, realizar sus gráficas y en ellas identificar: Dominio, Imagen, o.o, raíces, C^+, C^-, Eje de Simetría, Vértice, IC, ID.

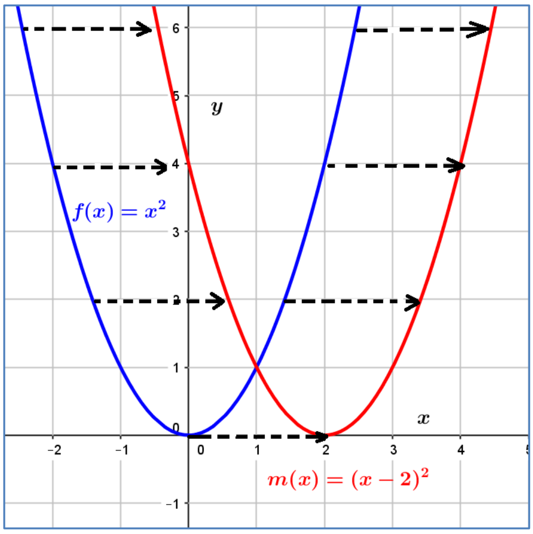
a) $g(x) = x^2 + 1$ b) $h(x) = x^2 - 4$ c) f(x) = x^2 se desplaza dos unidades hacia abajo.

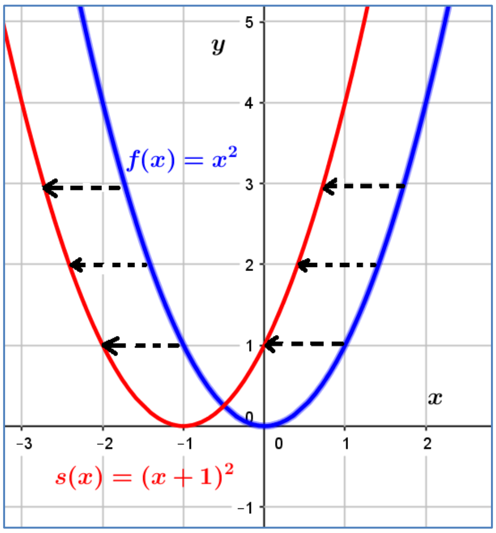
Desplazamiento Horizontal de la Función Cuadrática

¿Qué ocurrirá al desplazar la función elemental $f(x) = x^2$ en forma horizontal?

Si trasladamos la gráfica de f(x) dos unidades hacia la derecha, obtendremos la gráfica de la función $m(x) = (x-2)^2$.

Si trasladamos la gráfica de f(x) una unidad hacia la izquierda, obtendremos la gráfica de la función $s(x) = (x+1)^2$.





Ejercicio 9: Completar la siguiente tabla teniendo en cuenta las funciones mostradas anteriormente:

	y = x^2	***y = $(x-2)^2$***	***y = $(x+1)^2$***
Ordenada al Origen			
Vértice V : (Xv, Yv)			
Conjunto Imagen : Im f			
Eje de Simetría			
Intervalo de Crecimiento			
Intervalo de Decrecimiento			
Raíces			
Conjunto de Positividad			
Conjunto de Negatividad			

El desplazamiento horizontal de una función cuadrática:

- ✓ Deja invariantes la ordenada del vértice (Yv) y el conjunto Imagen.
- ✓ Modifica las raíces y ordenada al origen, los conjuntos de positividad y negatividad, la abscisa del vértice (Xv), el eje de simetría y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 10: Dados los siguientes desplazamientos horizontales de la función cuadrática elemental, realizar sus gráficas y en ellas identificar: Dominio, Imagen, o.o, raíces, C^+, C^-, Eje de Simetría, Vértice, IC, ID.

a) $g(x) = (x-2)^2$ b) $h(x) = (x+3)^2$ c) f(x) = x^2 se desplaza una unidad a la derecha.

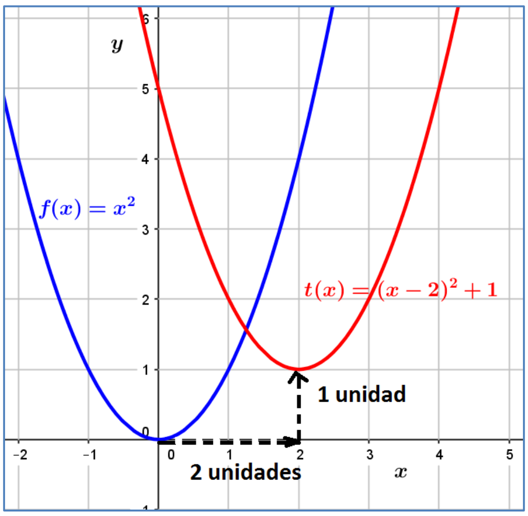
Desplazamientos Combinados de la Función Cuadrática

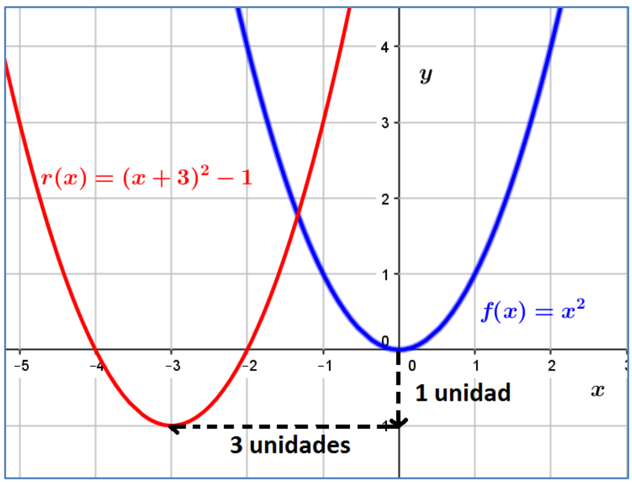
Si f(x) = x^2 se desplaza una unidad a la derecha y dos unidades hacia arriba, se obtiene la gráfica de

$$t(x) = (x-2)^2 + 1$$

Si f(x) = x^2 se desplaza tres unidades a la izquierda y una unidad hacia abajo, se obtiene la gráfica de

$$g(x) = (x+3)^2 - 1$$





Ejercicio 11: Completar la siguiente tabla teniendo en cuenta las funciones mostradas anteriormente:

	y = x^2	**y = $(x - 2)^2 + 1$**	**y = $(x + 3)^2 - 1$**
Eje de Simetría			
Vértice V : (Xv, Yv)			
Conjunto Imagen : Im f			

Ejercicio 12: Escribir la expresión algebraica correspondiente a los siguientes desplazamientos de f(x) = x^2.

a) 3 unidades hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda.

b) Media unidad hacia abajo y una unidad hacia la derecha.

c) Dos unidades hacia la derecha y 1,5 unidades hacia abajo.

Ejercicio 13: Indicar cuál fue el desplazamiento aplicado a la función cuadrática elemental para obtener cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $y = (x-5)^2$ b) $y = (x+4)^2 - \frac{7}{2}$ c) $y = 2x^2 + 2{,}5$

Ejercicio 14: Graficar las funciones del ejercicio anterior, señalando en cada caso el vértice y el eje de simetría.

Ejercicio 15: Escribir la expresión de la función que resulta de trasladar el vértice de y = x^2 al punto (2, 1).

Forma Canónica de la Función Cuadrática

¡Para leer y recordar!

La expresión algebraica obtenida luego de aplicar desplazamientos a la función cuadrática elemental se denomina ***forma canónica***:

$$\boldsymbol{y = f(x) = a(x-h)^2 + k}$$

✓ La forma canónica proporciona la siguiente información sobre la función cuadrática:

- el valor y signo de la abertura ***a***
- las coordenadas del vértice **V = (h, k)**
- la ecuación del eje de simetría **x = h**.

Ejercicio 16: Sin realizar cálculos, determinar el valor de *a,* el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes funciones cuadráticas dadas en su forma canónica:

a) $y = (x-2)^2 - 4$ b) $y = (x+3)^2 + 2$ c) $y = 3x^2 + 5$

d) $y = 2(x-2)^2$ e) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$

Ejercicio 17: Escribir la forma canónica de las parábolas representadas en el ejercicio 1 de este módulo, suponiendo que *a* = 1 o *a* = -1, segùn corresponda.

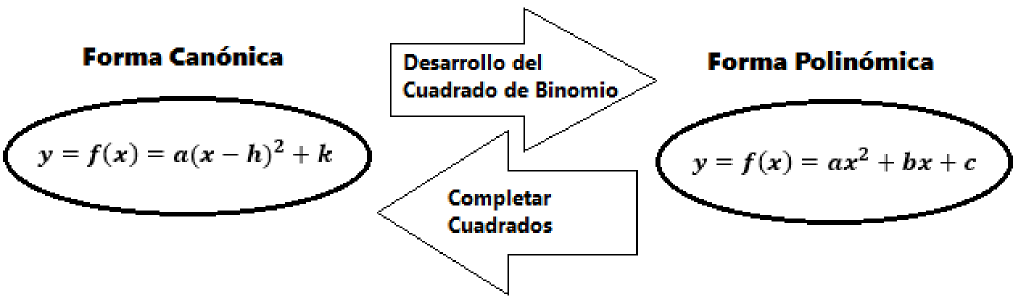
Ejercicio 18: Escribir la forma canónica de las funciones cuadráticas que tienen la misma abertura que f(x) = x^2 y cuyo vértice es:

a) (2, 3) b) (- 5, 4) c) (1, - 5) d) (- 4, - 6)

Ejercicio 19: Hallar en cada caso, el valor del coeficiente *a* de la función cuadrática :

a) Su gráfico pasa por el punto (1, - 1) y su vértice es V = (- 2, 3).
b) Su vértice es $V = \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ y una de sus raíces es x = 3.
c) Su gráfico intersecta al eje y en (0, 3) y su vértice es V = (1, 2).
d) El vértice es V = (- 2, 1) y la ordenada al origen es 4.

- ✓ Para expresar una función cuadrática en su forma polinómica, a partir de la forma canónica: **se desarrolla el cuadrado aplicando propiedades algebraicas.**
- ✓ Para expresar una función cuadrática en su forma canónica, a partir de la forma polinómica: **se aplica el método de completar cuadrados.**



Ejercicio 20: Expresar en su forma polinómica las funciones cuadráticas que han sido representadas en el ejercicio 1 y retomadas en el ejercicio 17 de este módulo.

Ejercicio 21: Escribir en su forma polinómica las funciones cuadráticas del ejercicio 16.

Para hallar las coordenadas del vértice de una función cuadrática a partir de su forma polinómica:

- ✓ La abscisa del vértice se obtiene aplicando la fórmula: $\boldsymbol{x_V = -\frac{b}{2a}}$
- ✓ La ordenada del vértice se obtiene reemplazando la abscisa Xv en la función: $\boldsymbol{y_V = f(x_v)}$

Ejercicio 22: Hallar el vértice y la ecuación del eje de simetría de cada una de estas parábolas.

a) $y = 2x^2 - 6x - 1$ b) $y = -3x^2 + 2x + 9$ c) $y = (0,5)\,x^2 - 3x + 1$ d) $y = 2x^2 + 5$

Ejercicio 23: Expresar las siguientes funciones cuadráticas en su forma canónica:

a) $y = x^2 + x$ b) $y = x^2 + 2x - 1$ c) $y = 2x - x^2$

d) $y = x^2 - 6x + 1$ e) $y = -x^2 + 4x + 3$ f) $y = 3x^2 - 12x + 13$

Aplicación de la Función Cuadrática en la Resolución de Problemas de máximos y mínimos

A continuación, se mostrarán algunos ejemplos de situaciones problemáticas que se modelizan planteando una función cuadrática y hallando su vértice, que puede ser un máximo o un mínimo.

Ejemplo 1: Entre todos los números enteros cuya resta es 100, determinar el par cuyo producto es el menor posible. ¿Cuánto vale este producto mínimo?

Sean **x** e **y** estos números. Sabemos que **x - y = 100**. Luego **x – 100 = y**.

Entonces, su producto es: **P = x. y = x . (x – 100)**

P(x) = x^2 – 100x

Ésta es una función cuadrática expresada en su forma polinómica, donde *a = 1, b = – 100, c = 0.* Observemos que el signo del coeficiente *a* es positivo, luego la función cuadrática tendrá un valor mínimo en su vértice. Para hallar las coordenadas del mismo, aplicamos las fórmulas correspondientes:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$x_V = -\frac{-100}{2.(1)} = 50$$

Cuando x = 50, entonces y = 50 – 100 = – 50.

Y el valor mínimo de P(x) es

$$y_V = P(x_v)$$

$$y_V = 50^2 - 100 \cdot 50$$

$$y_V = -2.500$$

Ejemplo 2: Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados, en pesos, por la siguiente función f(x) = 1000x – $2x^2$ donde x : es la cantidad de pares de zapatos que fabrica en el mes. ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso? ¿Cuál es el monto de ese ingreso máximo?

Observemos que el signo del coeficiente *a* es negativo, luego la función cuadrática tendrá un valor mínimo en su vértice. Hallamos entonces la abscisa del mismo: $x_V = -\frac{b}{2a}$

$$x_V = -\frac{1000}{2.(-2)} = 250$$

Luego, para obtener el mayor ingreso posible el fabricante deberá confeccionar 250 pares de zapatos al mes.

La ordenada del vértice es :

$$y_V = f(x_v)$$

$$y_V = 1000\,(250) - 2(250)^2$$

$$y_V = 125.000$$

Es decir que la ganancia máxima mensual es de $ 125.000.

Ejercicio 24: Resolver los siguientes problemas planteando una función cuadrática y hallar, según corresponda, su máximo o su mínimo.

a) Si la diferencia entre dos números es 6, ¿cuáles deben ser los números para obtener el producto mínimo? ¿Cuál es ese producto?

b) ¿Cuál es la máxima superficie que se puede delimitar con una soga de 100 m de largo dispuesta en forma rectangular sobre el piso?

c) La altura en metros (m) alcanzada por una pelota que es lanzada verticalmente hacia arriba, en relación al tiempo t, está dada por la siguiente función: h(t) = - 3 t^2 + 24 t. Encontrar el tiempo de altura máxima, y el valor en m de dicha altura.

d) Determinar dos números positivos cuya suma es 100 y la suma de sus cuadrados es mínima.

Las Raíces de la Función Cuadrática

Recordemos la definición de *ceros* o *raíces*: se trata de aquellos puntos de la función donde la abscisa es nula. Otra manera de expresarlo es: aquellos puntos donde la gráfica de la función intersecta el eje x.

Para hallar las raíces de una función f(x), se plantea $\boldsymbol{f(x) = 0}$ y se despeja, si es posible, los valores de **x** que verifican esta ecuación.

Para hallar las raíces de una función cuadrática a partir de su forma polinómica se plantea

$$\boldsymbol{f(x) = 0}$$

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

Es decir: **se plantea y se resuelve una ecuación cuadrática.**

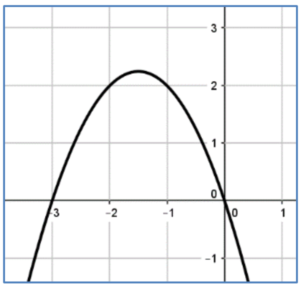
Se tienen tres situaciones posibles para clasificar las raíces de una función cuadrática. Para hacerlo recordemos, del módulo de Ecuación Cuadrática, la definición de *discriminante*: **Δ = *b*²– 4*ac*.**

Asimismo:

Cuando Δ > 0, la función tiene dos **raíces reales y distintas.**

Ejemplo: **y = - x² – 3x**

Δ = *b*²– 4*ac* = 1 > 0

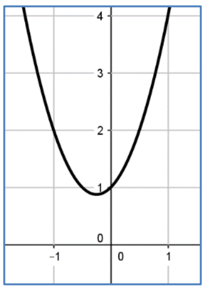


La parábola "cruza" el eje x.

Cuando Δ < 0, la función tiene dos **raíces complejas conjugadas**.

Ejemplo: **y = 2x² + x + 1**

Δ = *b*²– 4*ac* = 1 – 8 = - 7 < 0

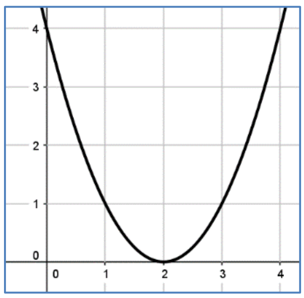


La parábola no toca el eje x.

Cuando Δ = 0, la función tiene una única raíz***, diremos raíz doble***.

Ejemplo: **y = x² – 4x + 4**

Δ = *b*²– 4*ac* = 16 – 16 = 0



La parábola se posiciona sobre el eje x.

Ejercicio 25: Hallar el número de puntos de corte con el eje x que tienen las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 2x^2 - x + 3$ b) $y = x^2 - 2x + 1$ c) $y = 7x - x^2$

d) $y = -x^2 - 6x - 9$ e) $y = -3x^2 - 7x - 3$ f) $y = 2x^2 + 3$

Ejercicio 26: Marcar una X donde corresponda:

Función	***Signo del Discriminante***			***Tipos de Raíces***		
	Δ > 0	***Δ < 0***	***Δ = 0***	***Reales distintas***	***Reales iguales***	***Complejas***
y = x^2 +5x -14						
y = x^2 +10x + 29						
y = - x^2 - 3x						
y = (1/3) x^2 -2x + 3						

Cómo graficar la Función Cuadrática a partir de su Forma Polinómica

En los siguientes ejemplos, realizaremos los cálculos previos necesarios y graficaremos una función cuadrática a partir de su forma polinómica.

Ejemplo 1: $y = f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

Al estar expresada en forma polinómica, identificamos ***a* = 2 , *b* = - 5, *c* = 2.**

- El valor de ***a* es positivo**, por lo tanto las ramas de la parábola irán ***hacia arriba***.
- La ordenada al origen se lee en el término independiente: **o.o = (0, 2)**
- Para hallar las raíces, igualamos la función a cero: $y = f(x) = 0$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Hemos obtenido una ecuación cuadrática completa. Recordemos la manera de resolverla:

$$x_1 , x_2 = \boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_1 , x_2 = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\,.\,2\,.2}}{2\,.\,2}$$

$$x_1 , x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x_1 , x_2 = \begin{cases} x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{.... Luego las raíces son:} \begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 2} \\ \boldsymbol{x_2 = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

- El cálculo del vértice se realiza aplicando las fórmulas correspondientes para hallar Xv e Yv :

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$x_V = -\frac{(-5)}{2(2)} = \mathbf{\frac{5}{4}}$$

$$y_V = f(x_v)$$

$$y_V = (x_v)^2 + 2x_v - 12$$

$$y_V = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4}\right) + 2$$

$$y_V = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 2 = \frac{25 - 50 + 16}{8} = -\mathbf{\frac{9}{8}}$$

Otra forma de hallar Xv en una función cuadrática con dos raíces reales distintas:

Cuando la función tiene raíces reales distintas x_1 y x_2, las mismas equidistan del eje de simetría.

Luego, la abscisa del vértice puede obtenerse haciendo $\boldsymbol{x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}}$

Luego $\boldsymbol{V = \left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)}$

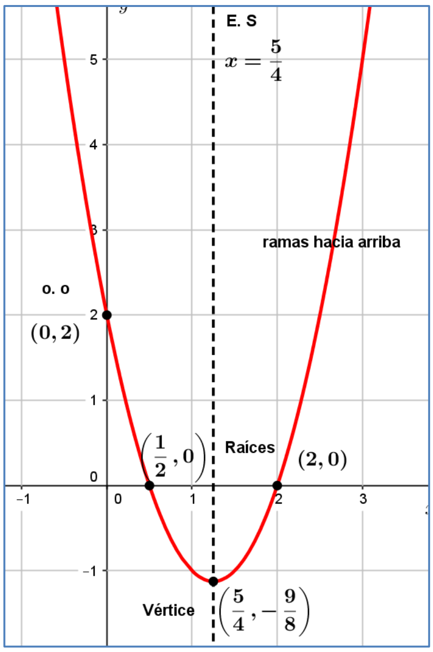
En nuestro caso, bastaría con plantear $x_V = \frac{\frac{1}{2}+2}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4}$

La ordenada y_V se calcula de igual manera, reemplazando la abscisa hallada en la función.

- Finalmente, el eje de simetría (E. S) es una recta paralela al eje y, de ecuación $\boldsymbol{x = \frac{5}{4}}$

Estamos ahora en condiciones de **graficar la función**. Recuperemos entonces los elementos calculados:

Valor de a	***Positivo (ramas hacia arriba)***
(o.o)	**(0, 2)**
Raíces	$\boldsymbol{\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}}$
Vértice	$\boldsymbol{V = \left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)}$
E. S	$\boldsymbol{x = \frac{5}{4}}$



Asimismo, en el gráfico podemos leer:

- Dom f : $\mathbb{R}$
- Im f: $\left[-\frac{9}{8}, +\infty\right)$
- C $^+$: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) U (2, +\infty)$
- C $^-$: $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
- ID: $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$
- IC: $\left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$

Ejemplo 2: $y = f(x) = 5x - x^2$, identificamos ***a* = - 1 , *b* = 5, *c* = 0.**

- El valor de ***a* es negativo**, luego las ramas de la parábola irán ***hacia abajo***.
- La ordenada al origen se lee en el término independiente: **o.o = (0, 0)**

- Para hallar las raíces, igualamos la función a cero: $y = f(x) = 0$

$$-x^2 + 5x = 0$$

Hemos obtenido una ecuación cuadrática incompleta.

Recordemos la manera de resolverla: $x(-x+5) = 0$ entonces $x = 0$ ó $-x + 5 = 0$

Raíces reales y distintas $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 0} \\ \boldsymbol{x_2 = 5} \end{cases}$

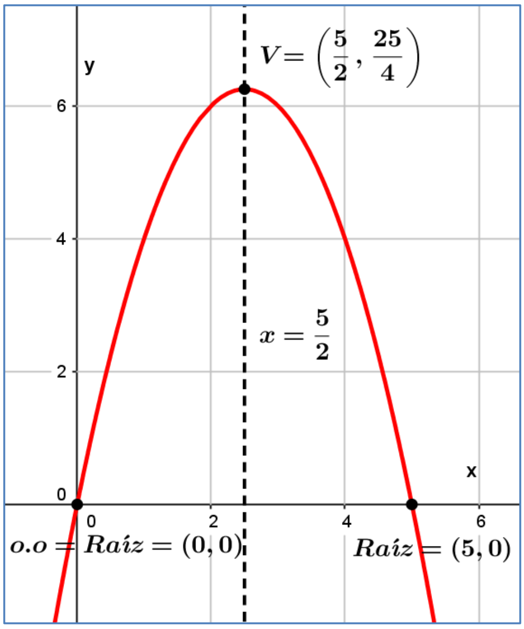
- Realizamos ahora el cálculo del vértice: $x_V = \frac{x_1+x_2}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$ $y_V = f(x_v)$

$$y_v = \frac{5}{2}\left(-\frac{5}{2} + 5\right) = \boldsymbol{\frac{25}{4}}$$

Luego $\boldsymbol{V = \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)}$

- Finalmente, el eje de simetría (E. S) tiene como ecuación a $\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$**.**

<u>Gráfico de la función:</u>



Valor de a	***Positivo (ramas hacia arriba)***
(o.o)	**(0, 0)**
Raíces	$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 0} \\ \boldsymbol{x_2 = 5} \end{cases}$
Vértice	$\boldsymbol{V = \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)}$
E. S	$\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$

Asimismo, en el gráfico leemos:

- Dom f : $\mathbb{R}$
- Im f: $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$
- C$^+$: $(0,5)$
- C$^-$: $(-\infty, 0)U(5, +\infty)$
- IC: $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$
- ID: $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

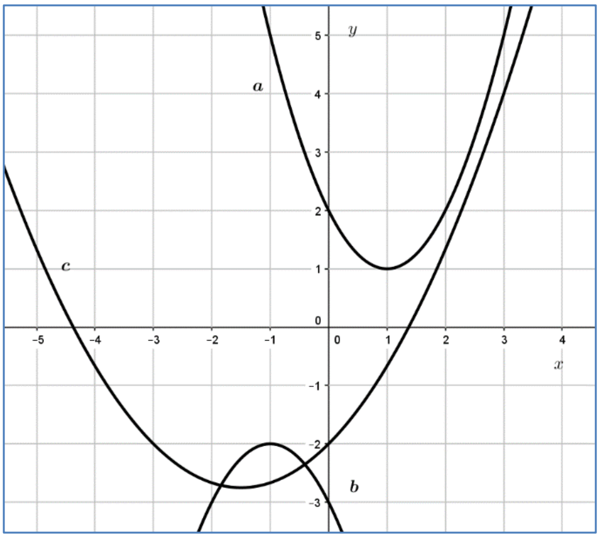
Ejercicio 27:

Asignar a cada una de las parábolas su correspondiente expresión algebraica. Fundamentar en cada caso tu elección, con tus palabras.

i) $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

ii) $y = x^2 - 2x + 2$

iii) $y = -x^2 - 2x - 3$



Ejercicio 28: Realizar los cálculos previos necesarios y graficar las funciones del ejercicio 25.

Ejercicio 29: Averiguar cuál es el punto simétrico del punto (-2, -5) con respecto al eje de simetría de la parábola $y = - 2x^2 - 16x - 29$.

Forma Factorizada de la Función Cuadrática

¡Para leer y recordar!

Una vez obtenidas las raíces de una función cuadrática, es posible expresar dicha función en su ***forma factorizada***:

$$\boldsymbol{y = f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)}$$

✓ La forma factorizada proporciona la siguiente información sobre la función cuadrática:

- el valor y signo de la abertura ***a***
- las raíces $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$.

Ejercicio 30: Sin realizar cálculos, identificar y clasificar las raíces de las siguientes funciones cuadráticas.

a) $y = 2(x-1)(x+3)$ b) $y = 5x\,(x-4)$ c) $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ d) $y = -(x-2i)(x+2i)$

Ejercicio 31: Suponiendo que *a* = 1, escribir la forma factorizada de las funciones cuadráticas que, en cada caso, tienen las siguientes raíces reales:

a) $x_1 = 5 \quad x_2 = -1$ b) $x_1 = \sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$ c) $x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{1}{3}$

d) $x_1 = x_2 = -\frac{1}{4}$ e) $x_1 = -\frac{3}{4} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$ f) $x_1 = 3 - \sqrt{2} \quad x_2 = 3 + \sqrt{2}$

Ejercicio 32: Escribir la expresión de todas las funciones cuadráticas cuya intersección con el eje x son los puntos (2; 0) y (3; 0).

Ejercicio 33: Escribir la forma factorizada de una función cuadrática tal que:

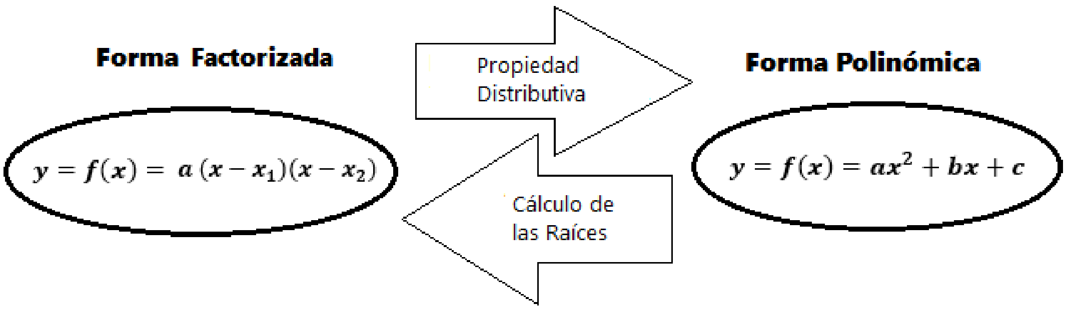
a) Pasa por los puntos (0; 0), (4; 0) y (2; - 4).

b) Su ordenada al origen es y = 5 y sus raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$.

c) Tiene por raíces a $x_1 = -2$ y $x_2 = -3$ y pasa por el punto (0, 6).

✓ Para expresar una función cuadrática en su forma polinómica, a partir de la forma factorizada: **se aplica la propiedad distributiva.**

✓ Para expresar una función cuadrática en su forma factorizada, a partir de la forma polinómica: **se realiza el cálculo de sus raíces.**



Ejercicio 34: Expresar en forma factorizada las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 3x^2 - 6x$ b) $y = x^2 - 13x + 42$ c) $y = 2x - x^2$

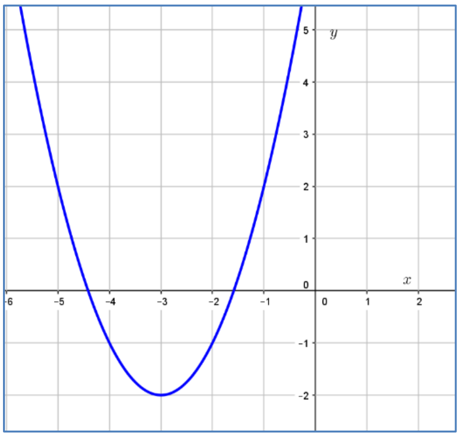
d) $y = x^2 + 14x + 49$ e) $y = 6x^2 - 24$ f) $y = -4x^2 - 3$

Es posible expresar una función cuadrática de tres formas: ***¡Para leer y recordar!***

Forma	*Expresión*	*Información que brinda*
Polinómica	$y = a\,x^2 + bx + c \qquad a \neq 0$	a , c : *ordenada al origen*
Canónica	$y = a\,(x - h)^2 + k \qquad a \neq 0$	a, *vértice* $V = (h, k)$
Factorizada	$y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2) \qquad a \neq 0$	a , *raíces* : x_1 x_2

Ejercicio 35: Escribir las funciones cuadráticas graficadas en su forma indicada:

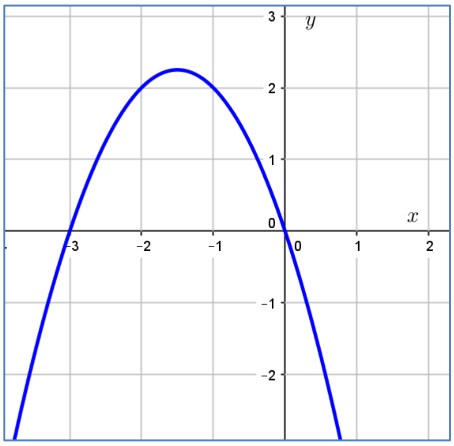
a)



Forma canónica:…………………………..

Forma polinómica: …………………………

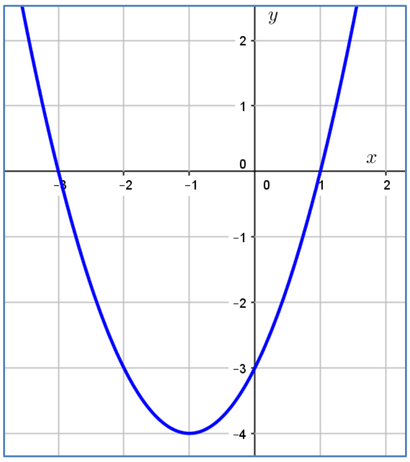
b)



Forma Factorizada:………………………..

Forma Polinómica:………………………

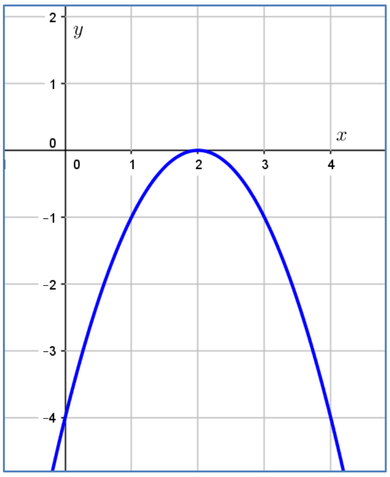
c)



Forma Factorizada:…………………………….

Forma Polinómica:…………………………..

d)



Forma canónica:…………………………..

Forma polinómica: …………………………

Ejercicio 36: Completar la siguiente tabla con las expresiones equivalentes que faltan:

Forma Factorizada	*Forma Polinómica*	*Forma Canónica*
$y = -(x-2)(x+2)$		
	$y = 2x^2 + 4x - 6$	
		$y = (1/2)(x-4)^2 - 8$

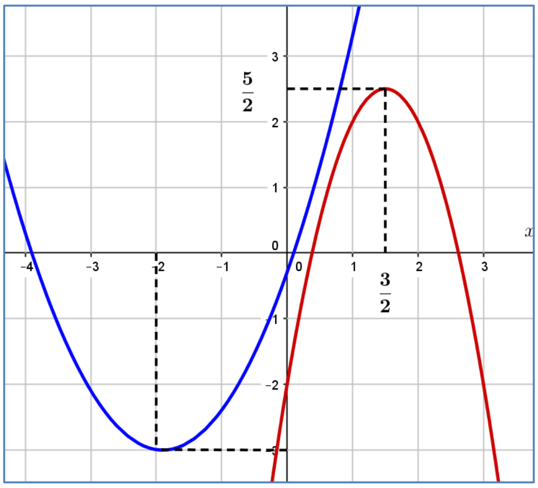
Ejercicio 37:

Para cada una de las funciones graficadas:

a) Escribir su forma canónica

b) Expresar en su forma polinómica

c) Calcular sus raíces y expresar en su forma factorizada.



Ejercicio 38:

a) Cierta función cuadrática pasa por los puntos (1; 1) ; (0; 0) y (- 1; 1). Determinar su forma polinómica.

b) Encontrar la forma polinómica de una función cuadrática que pasa por los puntos A (1; 4) ; B (2; 15) y cuya ordenada al origen es y = - 1.

c) Hallar el valor de b para que la parábola y = x^2 + b x + 3 tenga su vértice en el punto (2; - 1).

Ejercicio 39: Se quieren construir cajas de base cuadrada y de altura igual a 20 cm.

a) ¿Cuál será el volumen de la caja cuando la medida del lado de la base es de 10 cm? ¿Y si mide 2 dm?

b) Escribir una expresión algebraica que relacione el lado de la base con el volumen de la caja.

Ejercicio 40: Expresar el área del triángulo equilátero en función de su lado x.

Ejercicio 41: En una isla se introdujeron 112 iguanas. Al principio se reprodujeron con rapidez, pero al tiempo los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció. El número de iguanas a los **t** años está dado por: $I(t) = -t^2 + 22t + 112$ (t > 0).

a) ¿En cuántos años la población de iguanas llegó a su máximo valor?

b) ¿En qué momento la población de iguanas se extinguirá?

Ejercicio 42: Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $-\frac{1}{2}x - 2 - 6y = 0$ que pasa por el vértice de $y = -x^2 + 2x$. Graficar la recta y la curva en un mismo sistema de coordenadas.

Ejercicio 43: Hallar las rectas paralelas a la recta $x + y - 2 = 0$ que pasan por las raíces de la parábola $y = -2x^2 + 3x + 2$. Graficar la curva y las dos rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

POLINOMIOS Y FACTORIZACIÓN

En las unidades anteriores hemos estudiado las ecuaciones de primer y segundo grado.

$$a\,x + b = 0 \qquad a \neq 0$$

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Estas son casos particulares de ecuaciones de carácter más general, las llamadas **ecuaciones polinómicas,** y éstas a su vez de las **ecuaciones racionales**.

Para estudiar estas ecuaciones será necesario introducir previamente algunos conceptos como los de polinomios y expresiones racionales, con sus cuatro operaciones, y la noción de divisibilidad que ya vimos en la Unidad 1 para números enteros.

Polinomios

¡Para leer y recordar!

Definición

-Llamamos ***polinomio*** a toda expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \dots + a_1\,x + a_0$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_1,\ a_0$ son números reales, que denominamos *coeficientes*.

-Si $a_n \neq 0$, decimos que el polinomio tiene ***grado n***.

- a_n es llamado el ***coeficiente principal***.

- el coeficiente a_0 recibe el nombre de ***término independiente***.

-El polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero recibe el nombre de ***polinomio nulo***.

- El polinomio nulo carece de grado.

Ejemplo:

En el polinomio $4x^5 + 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x + 1$, se tiene que:

- Grado $\rightarrow$ 5
- Coeficientes $\rightarrow$ 4, 3, -2, 0, $-\frac{1}{2}$, 1
- Coeficiente principal $\rightarrow$ 4
- Término independiente $\rightarrow$ 1

Operaciones con Polinomios

A continuación mostraremos cómo se pueden realizar las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división entre polinomios.

Suma de Polinomios

Calculemos la suma de: $\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{x}) = 3x^2 + 2x + 1$ y $\boldsymbol{q}\ (\boldsymbol{x}) = 5x^3 - 7x + 8$

Una forma práctica de realizar esta operación es ordenar los polinomios y escribir uno debajo del otro. Si falta algún término intermedio en algún polinomio, lo *completamos* escribiendo dicho término con coeficiente 0,o dejando el espacio vacío.

$$\begin{array}{lcrrrr} p(x) & = & & +3x^2 & +2x & +1 \\ +q(x) & = & +5x^3 & +0x^2 & -7x & +8 \\ \hline p(x)+q(x) & = & 5x^3 & +3x^2 & -5x & +9 \end{array}$$

Resta de Polinomios

Realicemos ahora la resta de: $\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{x}) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 8$ y $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 5$

Para este caso también es conveniente ordenar los polinomios y escribir uno debajo del otro.

$$\begin{array}{lcrrrrr} p(x) & = & x^5 & +2x^4 & -7x^3 & & +8 \\ -q(x) & = & x^5 & +5x^4 & & -4x^2 & +5 \\ \hline p(x)-q(x) & = & & -3x^4 & -7x^3 & +4x^2 & +3 \end{array}$$

El polinomio que resulta de la suma o la resta puede ser el polinomio nulo, o su grado puede ser menor o igual al del polinomio de mayor grado que estamos sumando o restando.

$$\textbf{grado}\ (p(x) \pm q(x)) \leq \textbf{máx}\ \{\textbf{grado}\ p(x), \textbf{grado}\ q(x)\}$$

Ejercicio 1: Dados los siguientes polinomios, resolver las operaciones requeridas.

$$a(x) = -2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x \quad b(x) = 3x - 4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 \quad c(x) = x^4 - 5x + 2x^3$$

i) *a(x) + b(x)*

ii) *a(x) - b(x)*

iii) *c(x) - b(x)*

Producto de Polinomios

Para calcular el producto de dos polinomios multiplicamos cada uno de los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro y sumamos, es decir: aplicamos la ***propiedad distributiva*** que ya conocemos.

Ejemplo: Sean $p(x) = 2x^3 – 4x$ y $q(x) = 5x^2 – x + 2$

Resolvamos p(x). q(x)

$p(x) . q(x) = (2x^3 – 4x) . (5x^2 – x + 2) = 10x^5 – 2x^4 + 4x^3 – 20x^3 +4x^2 – 8x = 10x^5 – 2x^4 -16x^3 +4x^2 – 8x$

Ejercicio 2: Resolver los siguientes productos de polinomios:

a) $(x^3 – x + 1) (x^2 – x)$

b) $\left(-\frac{2}{3}x + x^3\right)(2x - 3x^2 + 1)$

c) $(2x - 3x^2 + 1)\left(-2x^3 - \frac{1}{2} + 3x\right)$

Ejercicio 3: Realizar las operaciones combinadas entre los polinomios dados.

$$b(x) = -\frac{1}{3} + \frac{3}{10}x^3 \qquad t(x) = x - \frac{1}{5}x^3 \qquad z(x) = 2x^2 - \frac{1}{2} + 3x^4$$

a) $[b(x)]^2$ =

b) $[b(x) + z(x)] . t(x)$ =

División de Polinomios

Recordemos que en la Unidad 1 estudiamos el algoritmo de la división, también llamado algoritmo de Euclides, para la división de números enteros.

Al realizar una división entre dos números enteros puede que el resto sea distinto de cero.

Pero el resto de la división entre dos números enteros **nunca** puede ser negativo.

Así, si queremos dividir 7 por 4 obtenemos

Dividendo →	7	4	→	*Divisor*
Resto →	3	1	→	*Cociente*

Se verifica entonces que

$$7 = 4 . 1 + 3 \ ,$$

y el resto es siempre menor que el valor absoluto del divisor, en este caso, $3 < |4|$.

Vamos a utilizar esta misma idea para realizar la división de polinomio, teniendo en cuenta que:

- El **grado** del polinomio dividendo debe ser **mayor o igual** que el grado del divisor.
- Los polinomios dividendo y divisor deben estar **completos** y **ordenados** decrecientemente.

Ejemplo: Hallemos el cociente y el resto de la división entre los polinomios $a\,(x) = 8\,x^4 + 6\,x^3 - 4$ y $b\,(x) = 2\,x^2$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 8x^4 & +\,6x^3 & -\,4 & \;2x^2 \\ \cline{5-5}
- & & & & \;4x^2 + 3x \\
 & 8x^4 & & & \\ \cline{1-4}
 & 0x^4 & +\,6x^3 & -\,4 & \\
- & & & & \\
 & & 6x^3 & & \\ \cline{1-4}
 & & 0x^3 & -\,4 &
\end{array}
$$

Cociente: $q\,(x) \;=\; 4\,x^2 \;+ 3\,x$

Resto: $r\,(x) \;=\; -\,4$

Ejemplo: Hallaremos el cociente y el resto de la división entre $a\,(x) = \;2\,x^2 + 3x^4 + x - 1$ y $b\,(x) = \;x^2 + x - 2$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & 0x^3 & +\,2x^2 & +\,x & -\,1 & \;x^2 + x - 2 \\ \cline{6-6}
-\,3x^4 & -3x^3 & +6x^2 & & & \;3x^2 - 3x + 11 \\ \cline{1-5}
 & -\;3\,x^3 & +\,8x^2 & +\,x & -\,1 & \\
 & 3x^3 & +\,3x^2 & -6x & & \\ \cline{1-5}
 & & 11x^2 & -5x & -\,1 & \\
 & & -\,11x^2 & -11x & +22 & \\ \cline{1-5}
 & & & -16x & +21 &
\end{array}
$$

Cociente: $q\,(x) \;=\; 3\,x^2 - 3\,x \;+\; 11$

Resto: $r\,(x) \;=\; -16x + 21$

Algoritmo de la División de Polinomios

Al dividir dos polinomios $a\,(x)$ y $b\,(x)$ se obtiene

¡Para leer y recordar!

$$
\begin{array}{r|l}
a(x) & b(x) \\ \cline{2-2}
r(x) & q(x)
\end{array}
$$

…donde $r\,(x) = 0$ ó grado $r\,(x) <$ grado $b(x)$

Entonces se verifica la identidad $\quad a\,(x) \;=\; b\,(x)\,.q\,(x) \;+\; r\,(x)$

Ejercicio 4: Verificar esta identidad en los dos ejemplos realizados anteriormente.

Ejercicio 5: a) Hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

b) Verificar aplicando en cada caso el algoritmo de la división.

I. $(x^5 + 7x^3 – 5x +1) : (2x + x^3) =$

II. $(x^3 + x – 5x^2) : (x^2 - 1) =$

III. $(x^4 – 11 x^2 – 20 + 30x – 2x^3) : (- 2 + x^2 + 3x) =$

Regla de Ruffini

Se aplica al dividir un polinomio P(x) por otro polinomio de la forma $(x-a),\ a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Mostraremos una comparación entre la división convencional y esta regla.

<table>
<tr><th>División convencional</th><th>Regla de Ruffini</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{rrrrr|l} & 3x^3 & +7x^2 & +6x & -1 & x+2 \\ \cline{6-6} + & -3x^3 & -6x^2 & & & 3x^2+x+4 \\ \cline{2-5} & & x^2 & +6x & -1 & \\ + & & -x^2 & -2x & & \\ \cline{2-5} & & & 4x & -1 & \\ + & & & -4x & -8 & \\ \cline{2-5} & & & & -9 & \end{array}$$

Cociente: $q(x) = 3x^2 + x + 4$
Resto: $r(x) = -9$

</td><td>

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & -6 & -2 & -8 \\ \hline & 3 & 1 & 4 & \multicolumn{1}{|r}{-9} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Cociente: $q(x) = 3x^2 + x + 4$
Resto: $r(x) = -9$

</td></tr>
</table>

Ejemplo: Dados $P(x) = x^3 – x + 2$ y $Q(x) = x – 2$, aplicamos la Regla de Ruffini para hallar P(x): Q(x).

$P(x) = 1x^3 +0x^2 –1 x + 2$

Coeficientes del dividendo

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{8} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Término independiente del divisor cambiado de signo

Resto

Coeficientes del cociente

Cociente: $C(x) = x^2 + 2x + 3$

Resto: $R(x) = 8$

Observa que el grado del polinomio cociente es una unidad menor que el grado del dividendo.

Ejercicio 6: Resolver aplicando en cada caso la Regla de Ruffini.

a) $(2x^3 + 3x - 1) : (x - 2) =$

b) $(-2x^3 + x^4 - 1) : (x + 2) =$

c) $\left(x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{4}{3}\right) : (x-1) =$

Ejercicio 7: Hallar en cada caso, el cociente y resto de la división entre *a* (*x*) y *b* (*x*), aplicando el método que creas conveniente.

a) $a(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 1$; $b(x) = x^2 - 1$

b) $a(x) = 2x^5 + 8x^3 - x^6$; $b(x) = x^2 + 2x$

c) $a(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x - 2$; $b(x) = x - 2$

d) $a(x) = x^6 + 4x^5 - 7x^3 - 4$; $b(x) = x + 1$

e) $a(x) = 2x^7 + 3x^6 + 18x^3 + 29x + 10$; $b(x) = 2x^2 + 3x$

f) $a(x) = -2x^5 - 4x^4 - x^3 - 8$; $b(x) = x + 2$

Ejercicio 8: ¿Es cierto que existe un polinomio k (x) tal que $6x^6 - 9x^4 + 10x^2 - 15 = k(x)(2x^2 - 3)$?

Valor Numérico de un Polinomio

¡Para leer y recordar!

Definición:

El **valor numérico de un polinomio** es el valor que se obtiene al *reemplazar* la variable por un número y *efectuar las operaciones indicadas.*

Ejemplo: El valor numérico del polinomio $p(x) = 5x^4 - 4x^2 + 6x - 1$ para $x = 2$

es $p(2) = 5.(2)^4 - 4.(2)^2 + 6.2 - 1 = 51$

Ejercicio 9: Encontrar los valores numéricos del polinomio p (x) del ejemplo recién citado para

$x = 0$; $x = 3$; $x = -1$.

Raíz de un Polinomio

¡Para leer y recordar!

Definición:

Un número $\boldsymbol{a}$ es una ***raíz* de un polinomio** $p\,(x)$ si el polinomio se anula para ese valor.

Es decir, $\boldsymbol{x = a}$ **es raíz del polinomio** $\boldsymbol{p\,(x)}$ **sí y sólo sí** $\boldsymbol{p\,(a) = 0}$.

Ejemplo: x = 2 es raíz de $p(x) = x^2 - 4x + 4$ porque $p\,(2) = 2^2 - 4.2 + 4 = 0$

Ejercicio 10: Determinar si x= 1 es raíz del polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

¿Puedes encontrar otras raíces del polinomio?

Ejercicio 11: Marcar la opción correcta:

Las raíces del polinomio $p(x) = 6x^3 + 13x^2 - x - 2$ son:

i. $\{-2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ ii. $\{-2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$ iii. $\{-1, 0, -6\}$ iv. Ninguna de las anteriores

Ejercicio 12: El polinomio $p\,(x) = x^4 - ax^3 + bx^2$ tiene como raíces $x = 3$ y $x = -1$.

Hallar los valores de a y b.

Divisibilidad de Polinomios

¡Para leer y recordar!

Si al realizar la división entera entre los polinomios

$a\,(x)$ y $b\,(x)$ el resto es nulo, decimos que

$\boldsymbol{a\,(x)}$ **es *divisible* por** $\boldsymbol{b\,(x)}$, o que $\boldsymbol{b\,(x)}$ ***divide* a** $\boldsymbol{a(x)}$.

En este caso, podemos expresar al polinomio $a\,(x)$ como $a\,(x) = b\,(x)\,.\,q(x)$.

Ejemplo: ¿Es el polinomio $p(x) = 20x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 6x$ divisible por $q(x) = 4x^2 - x$?

Aplicando el algoritmo de la división, obtenemos que:

$$q(x) = (5x^3 + 3x^2 - 6) \text{ y } r(x) = 0$$

luego, podemos afirmar : $4x^2 - x$ ***divide a*** $20x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 6x$

y $20x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 6x = (5x^3 + 3x^2 - 6)(4x^2 - x)$

Teorema del Resto

Como hemos visto en apartados anteriores, mediante la Regla de Ruffini se obtiene de forma sencilla el cociente y el resto de la división de un polinomio entre el binomio (x - a).

También hemos revisado el valor numérico de un polinomio.

Resuelve en grupo la siguiente actividad, teniendo estos conceptos en cuenta:

Ejercicio 13:

a) Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

i) $(2x^3 + 6x^2 - 1) : (x + 3)$

ii) $(x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 5) : (x - 1)$

b) Calcular el valor numérico de los polinomios dividendo del inciso a), para los valores x = -3 y x = 1 respectivamente.

c) Comparar dicho valor numérico con el resto obtenido en las divisiones efectuadas en el inciso a).

¿Qué has observado?

El resultado que seguro has observado se puede expresar como el enunciado del:

Teorema del resto:

"El resto de la división de un polinomio P(x) entre un binomio de la forma (x - a), es igual al valor numérico del polinomio cuando x toma el valor "a" que podemos expresar como P(a)"

Ejercicio 14:

a) Calcular el valor numérico del polinomio $p(x) = x^3 + 6x^2 - 3x - 4$ en los casos:

x = 0; x = -2 y x = 1.

b) Realizar la división del polinomio por el binomio del tipo (x - a) adecuado, y comprobar que el resto de la división coincide con el valor numérico calculado.

Ejercicio 15: Calcular el resto de las siguientes divisiones de polinomios, sin realizar la operación.

a) $(5x^2 - 2x + 4) : (x + 3)$

b) $(12x^4 - 5x^2 + 2x - 5) : (x - 2)$

c) $(2x^3 - 4x^2 - 3) : (x - 1)$

d) $\left(\frac{3}{2}x^3 + 4x^2 + 3\right) : (x + 2)$

Ejercicio 16: Encontrar los valores de a tales que al dividir $x^2 + 5x - 2$ por $x - a$, el resto sea – 8.

Un Caso Particular Muy Importante

Si a es raíz del polinomio $p(x)$, entonces
el resto de la división entre $p(x)$ y $(x - a)$ es 0.
es decir: $(x - a)$ divide a $p(x)$;
es decir: $p(x)$ es divisible por $(x - a)$.

Demostremos este resultado:

Aplicando el algoritmo de la división entre un polinomio $p(x)$ y el binomio $(x - a)$ obtenemos

$$p(x) = (x - a) \,.\, q(x) + r(x)$$

donde $r(x) = 0$, ó grado $r(x) <$ grado $(x - a) = 1$

es decir: $r(x) = r$ es un polinomio constante.

Entonces podemos expresar: $p(x) = (x - a) \,.q(x) + r$

Si a es raíz del polinomio $p(x)$, entonces: $0 = p(a) = (a - a) \,.\, q(a) + r = r$

Es decir: $\boldsymbol{r = 0}$.

Factorización de Polinomios

Si se realiza el producto $(x-2).(x+3)$, se obtiene el polinomio $x^2 + x - 6$, por lo que dicho polinomio puede expresarse como producto de factores: $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

Conseguir, cuando sea posible, expresar un polinomio como producto de polinomios primos es lo que se denomina "*factorizar el polinomio*".

- Para obtener polinomios primos del tipo $(x – a)$, bastará con encontrar valores de "a" para los que la división, que se efectúa por la regla de Ruffini, sea exacta (resto = 0) y aplicar el algoritmo de la división : "***Dividendo = divisor · cociente + resto***"

- Como el resto es igual a cero, $D(x) = d(x) \cdot c(x)$, obteniéndose el polinomio dividendo descompuesto en dos factores .

Ejemplo: Sea $p(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

- Como $p(2) = 8 - 4 - 28 + 24 = 0$; entonces 2 es una raíz de $p(x)$.
- Luego $p(x)$ es divisible por $x – 2$, es decir: $p(x) = (x - 2)\ q(x)$

Si aplicamos la regla de Ruffini para calcular el cociente $q\ (x)$ entre $p\ (x)$ y el binomio (x – 2), obtenemos :

$q\ (x) = x^2 + x - 12$ entonces $\mathbf{x^3 - x^2 - 14\,x + 24 = (x^2 + x - 12).\ (x - 2)}$) (1)

Como hemos visto anteriormente, podemos calcular las raíces de ($x^2 + x - 12$),que son:

$x_1 = 3$, $x_2 = -4$.

Luego, podemos expresar a $q\ (x)$ como sigue: $q\ (x) = \mathbf{x^2 + x - 12 = (x - 3)\ (x + 4)}$. (2)

Si reemplazamos (2) en (1) obtenemos: $\mathbf{x^3 - x^2 - 14\,x + 24 = (x - 2)\ (x - 3)\ (x + 4)}$

Observa que es más sencillo encontrar las raíces de cada factor, que las raíces del polinomio original.

Ejercicio 17: Dado el polinomio $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

a) Encontrar algún valor de "a" para los que el valor numérico del polinomio sea 0.

b) Verificar que el resto de la división de p(x) por x – a sea cero.

c) Factorizar el polinomio.

Ejercicio 18: Hallar todas las raíces de los siguientes polinomios, sabiendo que r es una de ellas:

a) $c\ (x) = 2\,x^3 + 6\,x^2 - 2\,x - 6$, $r = -3$

b) $a\ (x) = x^4 - x^3 + 3\,x^2 - 3\,x$, $r = 1$

Una regla muy útil: los valores de "x = a" enteros, para los que el valor numérico de un polinomio es cero, son siempre divisores del término independiente del polinomio.

Resumen: Dado un polinomio P(x), las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- El valor numérico para x = a es 0 o sea P(a) = 0
- La división del polinomio P(x) entre el binomio (x - a) es exacta
- (x - a) es un factor del polinomio: P(x) = (x - a) C(x), siendo C (x) el cociente de P(x) : (x-a)
- La ecuación P(x) = 0 tiene una solución para x = a.

Ejercicio 19: Factorizar los siguientes polinomios comprobando cada una de las cuatro afirmaciones anteriores:

a) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $q(x) = x^4 - 1$

c) $r(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ (Una raíz es $x = 4$)

Algunos Casos "Especiales" de Factorización de Polinomios

Factor Común	A veces ocurre que en un polinomio $p(x)$ la variable x aparece en todos los términos, en estos casos resulta conveniente extraer ***factor común***.

El procedimiento consiste en:

- extraer la variable x de cada término elevada a **la menor** de sus potencias y extraer un número que es factor de **todos** los coeficientes.

Siempre podemos verificar si la factorización obtenida es correcta, aplicando la propiedad distributiva.

Ejemplo:

$p(x) = 4x^5 + 8x^4 + 6x^3 - 10x^2 = 2x^2 \,.\, (2x^3 + 4x^2 + 3x - 5)$

Ejercicio 20: Extraer factor común:

a) $p(x) = 4x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 10x^2$

b) $q(x) = x + 3x^4 - 5x^2 + 4x^3$

c) $(x) = 3x^2 - 6x$

Diferencia de Cuadrados	$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)}$

Observemos que...

todo número positivo es el cuadrado de su propia raíz cuadrada.

Ejemplos:

i) $p(x) = x^2 - 25 = (x - 5)\;(x + 5)$

ii) $q(x) = x^4 - 9x^2 = (x^2)^2 - (3x)^2 = (x^2 - 3x)\;(x^2 + 3x)$

iii) $r(x) = x^2 - 6 = x^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = (x - \sqrt{6}\,)\;(x + \sqrt{6}\,)$

Ejercicio 21: Factorizar aplicando diferencia de cuadrados:

a) $p(x) = x^2 - 25$

b) $r(x) = 4x^6 - 1$

c) $s(x) = 9x^4 - x^6$

d) $m(x) = x^2 - 6$

e) $q(x) = 16 - x^4$

Ejercicio 22: Factorizar los siguientes polinomios aplicando la combinación de los dos casos vistos:

a) $a(x) = x^3 – 25x$

b) $j(x) = 2x^5 – 32\,x$

c) $s(x) = 6x^6 – 54\,x^2$

d) $z(x) = 3x^3 – 12x$

e) $t(x) = x^7 – 3x$

Factor Común por Grupos

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos.

Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos. El término técnico de este procedimiento es extracción de ***factor común por grupos*.**

Ejemplos:

i) $p(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 = (7x^5 - 5x^4) + (14x - 10) =$

$x^4 . (7x - 5) + 2 . (7x - 5) = (x^4 + 2) . (7x - 5)$

ii) $q(x) = x^7 + 3x^3 + 3x^8 + x^2 - 2x^5 – 2 =$

$(3x^8 + x^7 - 2x^5) + (3x^3 + x^2 - 2) =$

$x^5 . (3x^3 + x^2 - 2) + (3x^3 + x^2 - 2) =$

$(x^5 + 1) . (3x^3 + x^2 - 2)$

Ejercicio 23: Extraer factor común por grupos en los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4$

b) $q(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

c) $r(x) = x^3 + 3x^2 – x – 3$

d) $s(x) = 3x^3 + 5x^2 - 6x – 10$

Analicemos ahora el resultado de elevar un binomio al cuadrado.

$(x + 3)^2 = (x + 3)\,(x + 3)$

$(x - 3)^2 = (x - 3)\,(x - 3)$

Al desarrollar $(x + 3)^2$ obtenemos tres términos:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

- en uno aparece el cuadrado de x,
- en otro aparece 9 que es el cuadrado de 3,
- y en otro aparece $6x$ que es el doble del producto entre x y 3.

Al desarrollar $(x - 3)^2$, obtenemos una expresión similar donde la única diferencia está en el término del doble producto, que aparece restando: $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

Resumiendo: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ y $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

A las expresiones en el miembro derecho se las denomina ***Trinomio Cuadrado Perfecto***.

Generalizando estos resultados para el cuadrado de cualquier binomio:

Trinomio Cuadrado Perfecto	$a^2 + 2\,a\,b + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2\,a\,b + b^2 = (a - b)^2$

Ejemplos:

a) $p(x) = x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, x + 5^2 = (x - 5)^2$

b) $q(x) = 9x^4 + 36x^2 + 36 = (3x^2)^2 + 2 \,.\, 3x^2 \,.\, 6 + 6^2 = (3x^2 + 6)^2$

c) $r(x) = x^2 - x + 0{,}25 = x^2 - 2 \,.\, \frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Ejercicio 24: Factorizar aplicando el caso recién revisado.

a) $p(x) = x^2 + 6x + 9$

b) $q(x) = 4x^2 - 8x + 4$

c) $r(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

d) $s(x) = 4x^4 + 4x^2 + 1$

Ejercicio 25: Expresar los siguientes polinomios como productos:

$a(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

$b(x) = 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6$

$c(x) = 4x^2 + 4x + 1$

$d(x) = 3x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 3x^2 + 12x - 9$

$f(x) = 25x^6 + 20x^3 + 4$

$g(x) = x^6 - \frac{1}{16}x^2$

Ejercicio 26: Hallar todas las raíces reales de los polinomios del ejercicio anterior.

Ejercicio 27: Expresar los siguientes polinomios como productos y hallar sus raíces reales.

a) $a(x) = x^4 - x$

b) $b(x) = 2x^7 + 3x^6 - 5x^5$

c) $c(x) = 5x^3 - 10x^2 + 5x - 10$

d) $d(x) = x^2 - 6x + 9$

e) $e(x) = -2x^2 + 162$

f) $f(x) = x^4 - 81$

g) $g(x) = 4x^7 + 4x$

h) $h(x) = 3x^2 - 15$

i) $i(x) = x^4 + 12x^2 + 36$

j) $j(x) = 2x^3 - 48x^2 + 288x$

EXPRESIONES RACIONALES

¡Para leer y recordar!

Definición:

Así como llamamos números racionales a los números que se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$ con a , $b \in$ Z, y $b \neq 0$,

llamamos ***expresiones racionales*** a las expresiones de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y $q(x)$ no es el polinomio nulo.

$p(x)$ recibe el nombre de ***numerador*** y $q(x)$ el de ***denominador***.

Ejemplos:

a) $\frac{3}{x}$ donde $p(x) = 3$, y $q(x) = x$.

b) $\frac{-3x^2+5x-1}{x^3+6x^2+\sqrt{2}}$ donde $p(x) = -3x^2 + 5x - 1$, y $q(x) = x^3 + 6x^2 + \sqrt{2}$.

c) $x^3 + 3x^2 - x - 3$ donde $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$, y $q(x) = 1$.

Expresiones Racionales Irreducibles

¡Para leer y recordar!

Al trabajar con expresiones racionales es conveniente tener una expresión equivalente más simple.

Es posible simplificarlas cuando existen factores comunes al numerador y al denominador, en caso contrario, la expresión racional recibe el nombre de ***irreducible***.

Una herramienta útil para simplificar expresiones racionales es la factorización de polinomios, que ya hemos estudiado en esta unidad.

Ejemplos: Vamos a simplificar algunas expresiones racionales para que resulten irreducibles.

i) $p(x) = \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{x+1}{x(x+1)} = \boxed{\frac{1}{x}}$

ii) $q(x) = \frac{x^4+x^2}{x^4-1} = \frac{x^2(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \boxed{\frac{x^2}{x^2-1}}$

Ejercicio 28: Simplificar las siguientes expresiones racionales para que resulten irreducibles.

a) $r(x) = \dfrac{-x+2}{x^3-4x}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2+7x+10}{x^2-25}$

c) $j(x) = \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$ d) $w(x) = \dfrac{x^5-16x}{x^2}$

Operaciones con Expresiones Racionales

Suma y Resta – Expresiones de Igual Denominador

Observemos la similitud con las sumas y restas de fracciones.

Para sumar o restar dos expresiones racionales de igual denominador, operamos como lo hacíamos con los números racionales :

$$\boxed{\frac{p(x)}{m(x)} \pm \frac{q(x)}{m(x)} = \frac{p(x) \pm q(x)}{m(x)}}$$

Ejemplo: Consideremos las siguientes expresiones algebraicas: $\dfrac{-2x^2}{x^2-9}$ y $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$

Su suma es:

$$\frac{-2x^2}{x^2-9} + \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-2x^2+x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-x\,(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \boxed{\frac{-x}{(x-3)}}$$

Y su resta es:

$$\frac{-2x^2}{x^2-9} - \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-2x^2-(x^2-3x)}{x^2-9} = \boxed{\frac{-3x^2+3x}{x^2-9}}$$

Ejercicio 29: Resolver las siguientes sumas y restas de expresiones con igual denominador.

a) $\dfrac{2x-x^3}{x^2} + \dfrac{x\,(x+2)}{x^2}$ b) $\dfrac{3x^3+1}{12x^2} - \dfrac{5x^3-1}{12x^2}$

c) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x-1}{x-1}$ d) $\dfrac{1+x}{x^2-1} + \dfrac{5x^2+x}{x^2-1} - \dfrac{4x^2}{x^2-1}$

¡Para leer y recordar!

Definición:

Dos fracciones se dicen ***equivalentes*** si una de ellas se ha obtenido simplificando la otra o bien si ambas, al simplificarse dan lugar a la misma fracción.

Ejemplo: $\frac{45}{30} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ son fracciones equivalentes.

- La fracción que ya no puede simplificarse más, se denomina ***irreducible***.

Suma y Resta – Expresiones de Distinto Denominador

Recordemos que para sumar o restar números racionales de distinto denominador, debemos sumar o restar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{11}{12} + \frac{7}{10} = \frac{11}{2^2 . 3} + \frac{7}{2 . 5}$$

$$= \frac{5 . 11 + 2 . 3 . 7}{2^2 . 3 . 5}$$

$$= \frac{55 + 42}{60} = \frac{97}{60}$$

Lo más conveniente es tomar como denominador común el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los dos denominadores. Hemos visto que una forma de hallar el m.c.m. es factorizar ambos denominadores y luego multiplicar los factores comunes y no comunes con el máximo exponente con el que aparecen en cada factorización.

Para sumar o restar expresiones racionales procedemos en forma análoga.

Ejemplo: Calculemos $\frac{2}{3x^2 - 6x + 3} + \frac{x}{x^2 + 3x - 4}$

En primer lugar, hallamos el común denominador de ambas expresiones, para lo que debemos factorizar cada uno de los denominadores (*Te sugerimos revisar el apartado de Factorización*)

- $3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$
- $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$
- ***Por lo tanto el denominador común es*** $\mathbf{3(x - 1)^2 (x + 4)}$ *(¿Por qué?)*

Luego: $$\frac{2}{3x^2 - 6x + 3} + \frac{x}{x^2 + 3x - 4} = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{x}{(x-1)(x+4)} =$$

$$\frac{2(x+4)+x.3(x-1)}{3(x-1)^2(x+4)} = \boxed{\frac{3x^2-x+8}{3(x-1)^2(x+4)}}$$

Ejercicio 30: Realizar la resta entre las expresiones racionales del último ejemplo.

Ejercicio 31: Resolver las operaciones propuestas de expresiones con distinto denominador.

a) $\frac{1}{2x-1}+\frac{2x}{1-2x}$

b) $\frac{2}{x^2-9}+\frac{x+1}{x^2+6x+9}$

c) $\frac{8}{x^2-4}+\frac{x+4}{x+2}$

d) $\frac{x+5}{x^2-25}+\frac{x+2}{2x^2-6x-20}-\frac{21}{2x+2}$

Producto

Para multiplicar dos expresiones racionales procedemos en forma similar a como lo hacemos con los números racionales:

$$\boxed{\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x).c(x)}{b(x).d(x)}}$$

Ejemplo: Vamos a resolver y expresar como fracción irreducible la expresión:

$$\left(\frac{-x^2+4x}{x^2-9}\right)\cdot\left(\frac{5x+15}{x^3-4x^2}\right)$$

$$\left(\frac{-x^2+4x}{x^2-9}\right)\cdot\left(\frac{5x+15}{x^3-4x^2}\right) = \frac{(-x^2+4x).(5x+15)}{(x^2-9).(x^3-4x^2)} = \frac{-x(x-4).5(x+3)}{(x-3).(x+3).x^2(x-4)} = \boxed{\frac{-5}{x.(x-3)}}$$

División

Para dividir dos expresiones racionales multiplicamos la primera por la inversa de la segunda:

$$\boxed{\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{d(x)}{c(x)}=\frac{a(x).d(x)}{b(x).c(x)}}$$

Ejemplo: Calculemos $\frac{5\ x+10}{x^2-1} : \frac{3x+6}{x+1}$ expresando el resultado como fracción irreducible.

$$\frac{5\ x+10}{x^2-1} : \frac{3x+6}{x+1} = \frac{5\ x+10}{x^2-1}\cdot\boxed{\frac{x+1}{3x+6}} = \frac{(5\ x+10)(x+1)}{(x^2-1)(3\ x+6)} =$$

$$\frac{5(x+2)(x+1)}{(x\ -\ 1)(x\ +\ 1)3(x+2)} = \boxed{\frac{5}{3\ (x\ -\ 1)}}$$

Ejercicio 32: Resolver los siguientes productos y divisiones entre expresiones racionales y expresar el resultado como fracción irreducible.

a) $\dfrac{x^2-16}{x^2}\cdot\dfrac{x^2-4x}{x^2-x-12}$

b) $\dfrac{x^2+5x+6}{3x-3}\cdot\dfrac{x^2-x}{x+2}$

c) $\dfrac{x^2-4}{x}:\dfrac{x-2}{x+4}$

d) $\dfrac{x^2-16}{x-1}:\dfrac{x^2+8x+16}{x-1}$

Raíz de una Expresión Racional

Definición — ***¡Para leer y recordar!***

Un número *a* es una ***raíz*** de una expresión racional

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{si} \quad p(a) = 0 \quad \text{y} \quad q(a) \neq 0.$$

Es decir, las raíces de la expresión racional son los ceros del polinomio numerador que **NO** anulan al polinomio denominador.

Ejemplos

a) $x = 0$ es raíz de la expresión racional $p(x) = \dfrac{2x}{x-2}$, puesto que, 0 es raíz del numerador y no anula al denominador.

b) $x = 5$ no es raíz de la expresión racional $q(x) = \dfrac{(x-5)^2}{x-5}$ aunque anule al numerador, ya que también anula al denominador.

Ecuaciones Racionales

¡Para leer y recordar!

Definición:

Dados dos polinomios *p(x)* y *q(x),* donde *q(x)* no es el polinomio nulo,

Se denomina ***ecuación racional*** a toda expresión del tipo $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$

- Resolver una ecuación racional implica encontrar las raíces de la expresión racional, es decir: aquellas raíces del numerador *p(x)* que no anulen al denominador *q(x).*

Para resolver ecuaciones de este tipo hay que tener la precaución de descartar aquellos valores que anulen los denominadores de las expresiones racionales involucradas.

Ejemplos: Resolvamos las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\dfrac{x^2 - 4}{5\,x^3} = 0$ Luego $x \neq 0$ pues este valor anula el denominador.

Por lo tanto, $x^2 - 4 = 0$ y las soluciones de la ecuación racional son $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

b) $\dfrac{-x^2 + 4}{x^3 - 8} = 0$ Luego $x \neq 2$ pues este valor es raíz de $x^3 - 8$.

De esta manera $-x^2 + 4 = 0$ y las raíces del numerador son $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Por lo tanto, la única solución de la ecuación racional es $\boldsymbol{x = -2}$.

c) $\dfrac{2\,x+1}{x+3} = \dfrac{2\,x+2}{x-1}$ $x \neq -3$ y $x \neq 1$

$(2\,x + 1)\,(x - 1) = (2\,x + 2)\,(x + 3)$

$2\,x^2 - 2\,x + x - 1 = 2\,x^2 + 6\,x + 2\,x + 6$

$-x - 1 = 8\,x + 6$

$-7 = 9x$ Luego la solución de la ecuación racional es $x = -\frac{7}{9}$.

d) $\dfrac{x - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{x}$ $x \neq 0$, $x \neq 1$ y $x \neq -1$

$x\,(x - 1) = x^2 - 1$

$x = 1$ Luego, la ecuación **no tiene solución** *(¿Por qué?)*

Ejercicio 33: Resolver las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\dfrac{2\,x - 1}{3\,x + 2} = 7$

b) $\dfrac{-2 - 7\,x}{4} + 1 = \dfrac{1 - x}{5}$

c) $\dfrac{-2 - 4\,x}{3} = \dfrac{x - 1}{4} + 5$

d) $\dfrac{2\,x + 1}{x + 3} = 1 + \dfrac{x + 3}{x - 1}$

e) $\dfrac{x + 4}{x - 4} - \dfrac{x - 4}{x + 4} = \dfrac{(2\,x)^2}{x^2 - 16}$

f) $\dfrac{x^2}{x + 2} \cdot \dfrac{x^2 - 16}{x^3 + 4\,x^2} = 0$

g) $\dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{3}{x^2 - 1} = \dfrac{x^3 + 3}{x^3 - 1}$

h) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 5}{x - 2} = 0$

i) $\dfrac{x + 10}{x - 4} + \dfrac{2\,(x^2 - 4)}{x^2 + 4\,x + 4} = 0$

j) $\dfrac{x^2 + 2\,x + 4}{(x + 2)^2} : \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = 1$

FUNCIONES POLINÓMICAS

Definición **¡Para leer y recordar!**

Una función de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ son números reales, es una ***función polinómica***.

-Si $a_n \neq 0$,entonces la función es de ***grado n***.

- El Dominio de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales : $\mathbb{R}$ ó $(-\infty. +\infty)$

Te invitamos a aplicar todo lo que hasta ahora has aprendido en esta unidad, junto a la unidad de Funciones, en la resolución de los ejercicios que siguen.

Ejercicio 34: Dadas las funciones polinómicas, determinar el valor de **a** que verifica:

a) $f(x) = 1/2x^2 + 2x + 2$; $f(a) = 1/2$

b) $f(x) = ax^3 - 3x + a$; $f(-2) = 27$

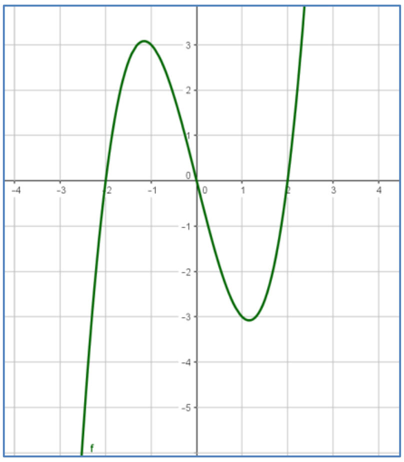
Ejercicio 35: Determinar de dos formas diferentes, si los valores de x indicados en cada caso son ceros de las funciones polinómicas correspondientes.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$

b) $g(x) = x^2 - 3x$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$

c) $h(x) = 2x + 1$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = -1/2$

Ejercicio 36: ¿A qué función corresponde la gráfica?



a) $f(x) = x^3 + 4x$

b) $f(x) = x^3 - 4x$

c) $f(x) = -x^3 - 4x$

d) $f(x) = -x^3 + 4x$

Ejercicio 37: Hallar los puntos de intersección de las siguientes funciones polinómicas con los ejes coordenados.

a) $f(x) = 5x + 3$

b) $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$

c) $f(x) = x^2 - 3x$

d) $f(x) = x^4 - 3x^2$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

En esta Unidad estudiaremos y analizaremos las **funciones y ecuaciones exponenciales** y Su fuerte relación con los logaritmos. La necesidad de resolver ecuaciones exponenciales trae consigo hallar la función inversa de la función exponencial y es donde toma sentido la función logaritmo. Repasaremos algunas propiedades de los logaritmos para centrarnos en resolver ecuaciones logarítmicas y situaciones problemáticas donde se encuentren involucradas ecuaciones tanto exponenciales como logarítmicas.

Recordemos…

Hasta ahora hemos estudiado potencias pertenecientes a distintos campos numéricos:

- potencias de exponente natural

Ejemplos:

$a^n = \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,....\,a}_{n \text{ veces}} \quad n \in \mathbb{N},$ $\qquad 4^4 = 4.4.4.4 = 256$

- potencias de exponente nulo

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$ $\qquad 4^0 = 1$

- potencias de exponente entero negativo

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad n \in \mathbb{N}\ ,\ (a \neq 0),$ $\qquad 4^{-3} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

- potencias de exponente fraccionario

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$ $\qquad 4^{5/2} = \sqrt{4^5}$

También conocemos sus propiedades:

$a^m . a^n = a^{m+n}$ $\qquad 4^3 . 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $\qquad 4^7 : 4^5 = 4^{7-5} = 4^2$

$(a^m)^n = a^{m.n}$ $\qquad (4^3)^2 = 4^{3.2} = 4^6$

Las expresiones exponenciales aparecen con frecuencia en distintas situaciones y pueden ser abordadas mediante modelos matemáticos. Veamos los siguientes problemas:

PROBLEMA 1

Las amebas son seres unicelulares que se reproducen dividiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora, y que inicialmente solo hay una ameba. Proponemos calcular el número de amebas que habrá según pasan las horas:

Tiempo (hs)	1	2	3	4	5	6	7	… x
Nro. de amebas	2	4	8					… 2^x

Si en el momento inicial hay k amebas, y en la primera hora se duplican, entonces ahora hay $2k$.

En la segunda hora se vuelven a duplicar, es decir, $2\,(2k) = 2^2\,k$,
En la tercer hora se repite la situación y tenemos $2(2^2k) = 2^3k$,

Luego en general en la hora x, se tiene $\mathbf{2^{x}\,k}$.

Si y es la variable: número de amebas que habrá, transcurridas x horas y x es la variable: horas transcurridas, entonces el número total de amebas al cabo de x horas transcurridas será

$$y = 2^{x}$$

Si al comienzo del proceso había k amebas, el número total será:

$$\boldsymbol{y = k\,2^{x}}$$

PROBLEMA 2

Las sustancias radioactivas tienen la propiedad de desintegrarse con el tiempo. En un laboratorio, se hace la observación de una sustancia particular que pierde el 2,5% de su masa cada día. Al inicio del experimento dicha sustancia tiene una masa de 3 kg. Responder:

a) ¿Cuál será su masa después de una semana?
b) ¿Qué masa tendrá 30 días después?
c) ¿Después de un año cual será la masa de esta sustancia?
d) Esbozar una gráfica de esta relación funcional.

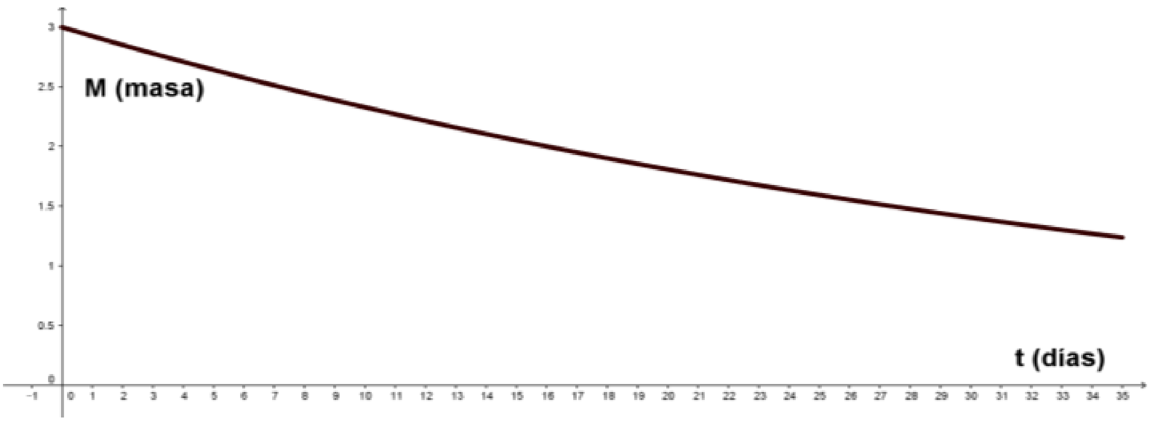
Para responder, convenientemente armaremos una tabla de valores:

TIEMPO (días)	MASA (kg.)
0	3
1	$3 - 3 \cdot \frac{2,5}{100} = 3 \cdot \left(1 - \frac{2,5}{100}\right) = 3 \cdot 0.975 = 2.925$
2	$2.925 - 2.925 \cdot \frac{2,5}{100} = 2.925 \cdot \left(1 - \frac{2,5}{100}\right) = 2.925 \cdot 0.975 = 3 \cdot 0.975^2 = 2.85187$
3	$3 \cdot 0.975^3 = 2.780578125$
4	$3 \cdot 0.975^4 = 2.711063672$
5	$3 \cdot 0.975^5 = 2.64328708$
6	$3 \cdot 0.975^6 = 2.577204903$
7	$3 \cdot 0.975^7 = 2.512774781$

Así podemos observar que por cada día la masa disminuye 100% - 2.5% =97.5%, luego basta multiplicar la masa por 0.975. Por tanto nos será útil la fórmula $\boldsymbol{M\,(t) = 3 \cdot 0.975^{t}}$ donde $\boldsymbol{t}$ indica el tiempo (variable independiente) y $\boldsymbol{M}$ la masa de la sustancia (variable dependiente).

Con la expresión hallada, podemos calcular fácilmente lo pedido:

a) $t = 7$ entonces $M\,(7) = 3 \cdot 0.975^{7} = 2.512774781$ kg.
b) $t = 30$ entonces $M\,(30) = 3 \cdot 0.975^{\mathbf{30}} = 1.403652895$ kg.
c) $t = 365$ entonces $M\,(365) = 3 \cdot 0.975^{\mathbf{365}} = 0.0002909417084$ kg.



Observación: En ambos problemas, la variable independiente aparece ubicada en el exponente.

¡Para leer y recordar!

Definición

Dado $\boldsymbol{a} > 0$ $(a \neq 1)$ llamamos *función exponencial* de base $\boldsymbol{a}$ a la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

definida por $\boldsymbol{f(x) = k\, a^{x}, k \in \mathbb{R}}$

El comportamiento de la función exponencial varía según sea $\boldsymbol{a} > 1$ y $\boldsymbol{a} < 1$.

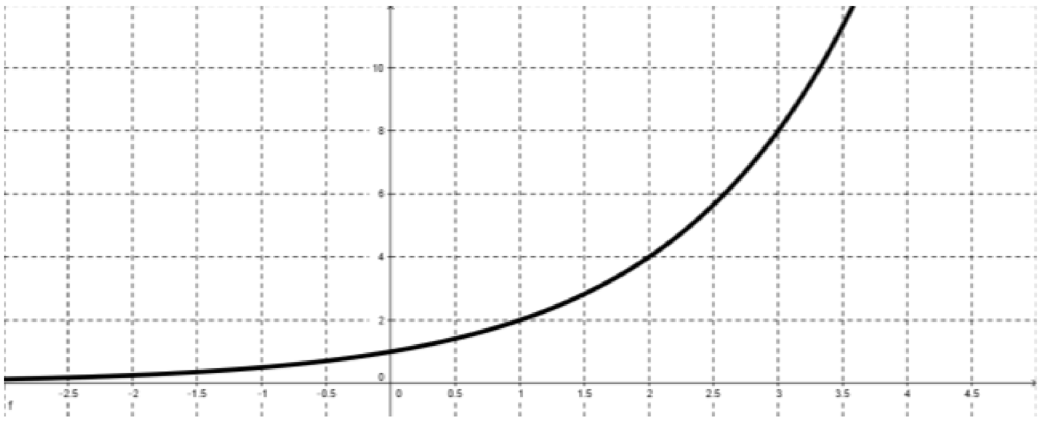
¿Qué sucede si a = 1?

Analicemos la gráfica de la función exponencial de acuerdo al valor de $\boldsymbol{a}$.

a) **Si $\boldsymbol{a} > 1$** ,

Tomemos por ejemplo $a = 2$, entonces la función será $y = 2^{x}$. Si realizamos una tabla de valores, obtenemos

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	…
y	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…



Observemos que en general:

Cualesquiera sea el valor de ***a* > 0**, ($a \neq 1$) la gráfica de la función exponencial debe pasar por el punto (0,1), ya que todo número no nulo elevado a la cero es igual a 1. Esto es:

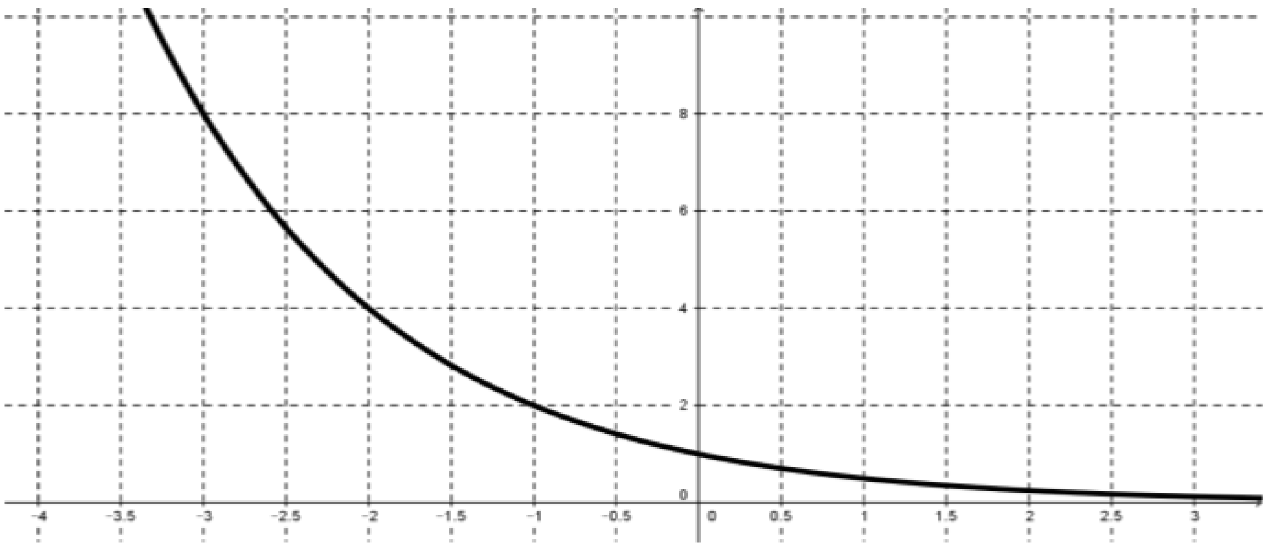
f (0) = a^0 = 1 es la ordenada al origen

Por otro lado es claro que a medida que el valor de *x* aumenta, el valor de a^x también, y si el valor de *x* decrece (con valores negativos) entonces el valor de a^x tiende a 0.

b) **Si 0 < *a* < 1**

Si tomamos a = $\frac{1}{2}$, la función será *y* = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ó bien $y = 2^{-x}$

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	…
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	2	4	8	…



Observemos ...

Nuevamente, cualquiera sea el valor de ***0 < a < 1***, la gráfica de la función pasa por el punto (0; 1).Por otro lado, a medida que el valor de x aumenta, el valor de a^x decrece.

El dominio de toda función exponencial es el conjunto de los números reales.

ACTIVIDADES

Ejercicio 1: Representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = 3^x$

b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $y = 3 \cdot 2^x$

d) $y = 2^x$

e) $y = -3^x$

f) $y = 2^{-x}$

g) $f(x) = 10^x$

h) $g(x) = e^x$

i) $h(x) = 2 \cdot 10^x$

j) $m(x) = 5 \cdot e^x$

k) $n(x) = -3 \cdot 10^x$

l) $p(x) = -5 \cdot e^x$

m) $q(x) = 0{,}1^x$

n) $r(x) = 100^x$

Observación:

La función exponencial y = e^x tiene por base un número muy particular.

El número *e* es un número irracional que está entre 2 y 3. Para encontrar aproximaciones de ese número se le asignan valores naturales a *n,* cada vez más grandes, en la expresión

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Si tomáramos, por ejemplo, *n* = 3000, obtenemos el valor 2,7178289.

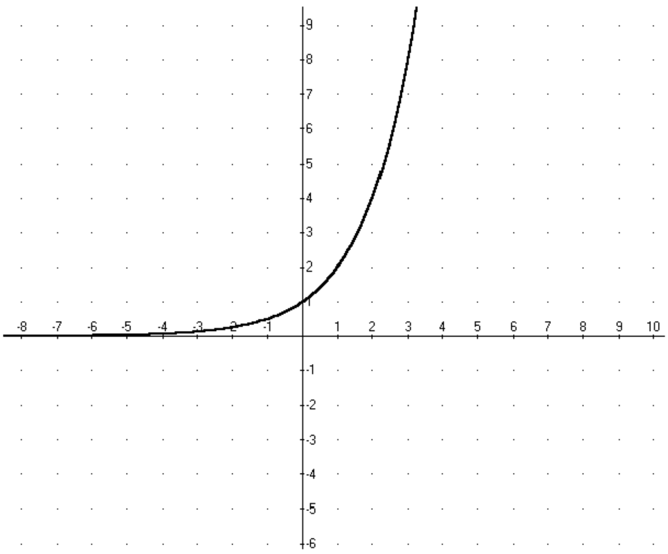
Ejercicio 2: Dada la función $f(x) = 2^x$
Sin utilizar tablas de valores dibujar las funciones:

$g(x) = 2^x + 3$

$h(x) = 2^x - 4$

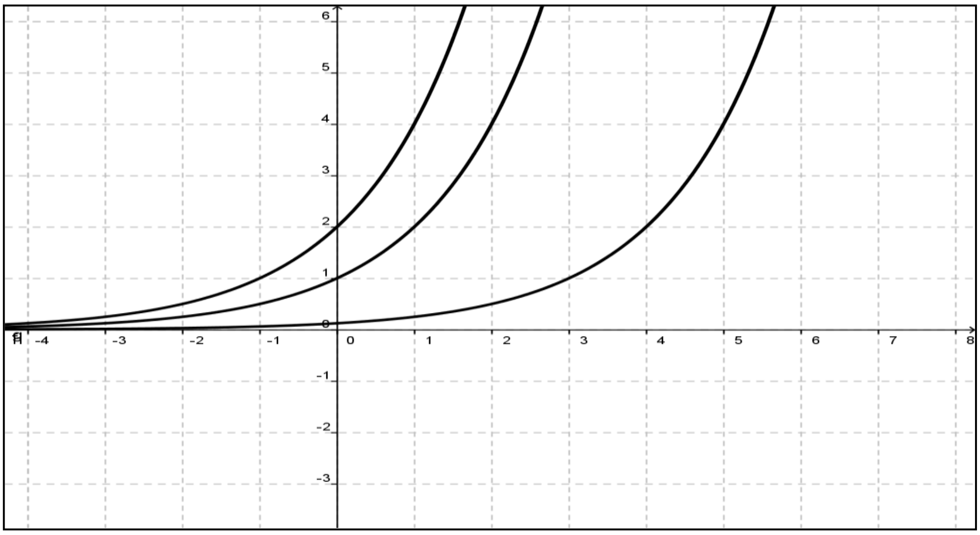
$m(x) = 2^{x+2}$

$n(x) = 2^{x-1}$



Ejercicio 3: A partir de $y = 2^{x}$ se obtuvieron las gráficas de $y = 2^{x+1}$ e $y = 2^{x-3}$

a) Identificar cada gráfica con su expresión analítica correspondiente.
b) Explicar los cambios de las gráficas según sus exponentes.



Ejercicio 4:

Dada la función $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

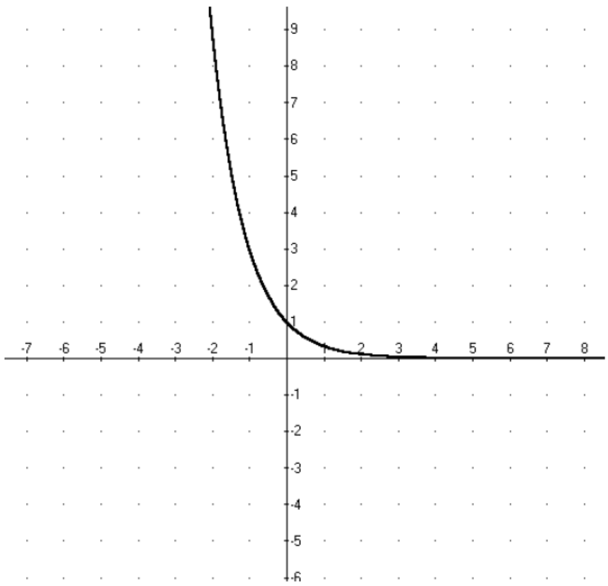
Sin utilizar tablas de valores dibujar las funciones:

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 4$$

$$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x} - 3$$

$$m(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$$

$$n(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$



Ejercicio 5:

Un elemento radiactivo que decae en su crecimiento $f(t)$ después de un tiempo t satisface la fórmula $f(t) = 60 \cdot 2^{-0{,}02\,t}$

a) ¿Cuál es la cantidad de este elemento al inicio del proceso?
b) ¿Qué cantidad queda después de 500 años?
c) ¿Qué cantidad queda después de 1000 años?

ECUACIONES EXPONENCIALES

¡Para leer y recordar!

Definición

A una ecuación en la que la incógnita aparece en un exponente se la llama ecuación exponencial

<u>Ejemplos</u>: Resolvemos entre todas las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $5^{3-x} = 125$ entonces $5^{3-x} = 5^3$ (potencias de igual base) así 3 – x = 3, luego x = 0

b) $3^{1-x^2} = \frac{1}{27} \quad \Rightarrow \quad 3^{1-x^2} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3} \quad \Rightarrow \quad 3^{1-x^2} = 3^{-3} \quad \Rightarrow \quad 1 - x^2 = -3$

Luego $4 = x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4} = |\, x \,|$ por lo tanto $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$

Ejercicio 6: Determinar, si existe, el valor de la incógnita:

a) $4 \cdot 3^x - 4 = 0$

b) $2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$

c) $2^{5x+3} = 32$

d) $16^x \cdot (4^x)^2 = 4^{x+3}$

e) $\dfrac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 128$

f) $4^{3x+1} = 1$

g) $2^x - 2^{2-x} = 0$

h) $3^{2x} + 9^x = 162$

i) $\dfrac{2^{2x}}{2^{x-2}} = 32$

Ejercicio 7: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $7^{x+1} = 7^{3x+2}$

b) $5^{x+3} = 5$

c) $2^x = 1024$

d) $2^{3x+1} = 1$

e) $3^{5x} = 81$

f) $3^{2x-1} = \frac{1}{9}$

g) $3^x = \sqrt{3}$

h) $7^{x-1} = 49^{3x-2}$

i) $25^{2x} = 125^{x-1}$

j) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 14$

k) $7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$

l) $3^{x+1} + 3^{x+2} - 3^{x+3} = -5$

m) $3 \,.\, 2^x - 5 \,.\, 2^{x-2} = 14$

n) $2 \,.\, 3^{x+3} + 4 \,.\, 3^{x+4} = 14$

o) $3^{2x} - 3^{x+1} = 54$

p) $2^{2x+2} + 2^{x+3} = 320$

q) $4^x - 2^{x+1} - 3 \,.\, 2^x = 24$

r) $9^x + 5 \,.\, 3^{x+2} + 7 \,.\, 3^x = 2349$

LOGARITMOS

Consideremos la ecuación $5^{1-x} = 28$.

Observamos que no podemos expresar al segundo miembro como potencia de 5, lo cual nos permitiría resolver la ecuación de manera similar a la sección anterior.

Nuestra pregunta es: ¿cómo podemos resolver en general ecuaciones del tipo $a^x = k$?

¡Para leer y recordar!

Definición

Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, e $y > 0$, llamaremos **logaritmo en base a de y** al único número x que verifica $a^x = y$. Es decir,

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

El número y es siempre positivo y es llamado argumento.

Para Interpretar la definición de logaritmo veamos las siguientes situaciones:

a) Sabemos que $2^7 = 128$
   Si $2^7 = 128 \Rightarrow \log_2 128 = 7$ y si $\log_2 128 = 7 \Rightarrow 2^7 = 128$

b) $8^{1/3} = 2$
   Si $8^{1/3} = 2 \Rightarrow \log_8 2 = \frac{1}{3}$ y si $\log_8 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 8^{1/3} = 2$

Propiedades de los Logaritmos

Recordemos algunas propiedades de los logaritmos:

1.- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$\boxed{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$$

Ejemplo:

$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8$

$\log_2 32 = 2 + 3$

$5 = 5$

2.- El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base

$$log_a\,(x^y) = y \cdot log_a\, x$$

Ejemplo:

$log_2(4^3) = log_2 64 = 6$ pues $2^6 = 64$ y se obtiene el mismo resultado planteando $3 \cdot log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$

A partir de estas dos propiedades se pueden deducir las siguientes:

3.- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a\, x - log_a\, y$$

Observar que $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a x + \log_a y^{-1} = log_a\, x - log_a\, y$

Ejemplo:

$$log_3\left(\frac{81}{9}\right) = log_3 81 - log_3\, 9 = 4 - 2 = 2$$

Para pensar…

El logaritmo de la base es siempre 1

$\boldsymbol{log_a\, a = 1}$ ¿por qué?

El logaritmo de 1 es 0 en cualquier base

$\boldsymbol{log_a 1 = 0}$ ¿por qué?

¡Para leer y recordar!

Logaritmo decimal

Los logaritmos decimales son los logaritmos de base 10, y se acostumbra denotar $\log_{10}(x) = log\,(x)$ omitiendo la base.

Logaritmo neperiano

El logaritmo neperiano o natural es el logaritmo cuya base es el número $e \cong 2{,}7182$ y se denota $log_e\,(x) = ln(x)$.

Algunas calculadoras científicas tradicionales, permiten solamente obtener logaritmos decimales y neperianos. Si queremos calcular logaritmos en otra base, es conveniente realizar cambios de base.

Ejemplo: Calcular *log*$_2$ 3

Llamamos *x* al logaritmo que queremos calcular: $x = \log_2 3$

Por definición de logaritmo: $2^x = 3$

Si aplicamos logaritmo decimal a ambos miembros, obtenemos: $\text{Log}\,(2^x) = \log 3$

Por propiedades de los logaritmos se tiene que: $x \cdot \log_2 = \log 3$

Por tanto $x = \dfrac{\log 3}{\log 2}$

Te animas a generalizar?

Queremos calcular $\boldsymbol{\log_a y}$

Si llamamos x al logaritmo que queremos calcular, entonces x =……………………………..

Por definición de logaritmo: ………………………………………………………………………………

Si aplicamos logaritmo decimal a ambos miembros, obtenemos:……………………………..

Por propiedades de los logaritmos ……………………………………………………………………

Entonces x = ……………………………………………………………………………………………

Ejercicio 8: Resolver, si es posible, los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $\log_2 4 =$ d) $\log_5 25 =$ g) $\log 100 =$ j) $\log_9 9 =$ m) $\log_2 16 =$

b) $\log_5 1 =$ e) $\log_{1/2} 2 =$ h) $\log_3 (3^2) =$ k) $\log_7 1 =$ n) $\log_{\sqrt{2}} 2 =$

c) $\log_{1/2} 8 =$ f) $\log_{1/a} (a^2) =$ i) $\log_b 1 =$ l) $\log_c c =$ o) $\log(-16) =$

Ejercicio 9: Expresar en notación exponencial o logarítmica según corresponda.

(Ejemplo: $2^3 = 8 \iff \log_2 8 = 3$)

a) $6^3 = 216$

b) $\log 1000 = 3$

c) $\log_4 32 = \dfrac{5}{2}$

d) $10^{-2} = \dfrac{1}{100}$

e) $4^{\frac{1}{2}} = 2$

Ejercicio 10: ¿Cuál es el resultado de $\log_2(\log 10000)$?

Ejercicio 11: Usando la calculadora determinar si existen los siguientes logaritmos:

$\log 99 =$ $\log 37 =$ $\ln 20 =$ $\ln 0 =$ $\ln e =$ $\log(-5) =$

Ejercicio 12: Resolver aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_5 25 + \log_2 \frac{1}{4}$

b) $\log 1000 - \frac{1}{3} \log_{1/2} 1$

c) $\log_2 \sqrt{2} + \log_3 \sqrt[3]{3^4} - \log 0{,}001$

d) $\log_3 27 + \log_{1/2} 4 - 2 \log_{1/3} \frac{1}{9}$

Ejercicio 13: Hallar el valor de *x:*

a) $\log_7 x = 2$

b) $\log_8 x = \frac{1}{3}$

c) $\log_{49} \sqrt{7} = x$

d) $\log_x 10 = \frac{1}{4}$

e) $\log_a x = 0$

f) $\log_2 64 = x$

g) $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$

h) $\log_x 0{,}000001 = -6$

Ejercicio 14: Averiguar el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $\log_a(a^2 \sqrt{a})$

b) $\log_x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64}$

d) $10^{\log_a \sqrt{a}}$

e) $\log_a 1$

f) $\log_2 \sqrt[3]{64}$

g) $2^{\log_a a^2}$

h) $10^{\log_a (\sqrt{a} a^3)}$

Ejercicio 15: Verificar con un ejemplo que en general:

a) $\log_a (x + y) \neq \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a (x - y) \neq \log_a x - \log_a y$.

Ejercicio 16: Sabiendo que $\log_2 5 \cong 2{,}3$ calcular, aplicando las propiedades del logaritmo.

a) $\log_2 10$

b) $\log_2 2{,}5$

c) $\log_2 \sqrt{5}$

d) $\log_2 25$.

Ejercicio 17: Expresar en un solo logaritmo aplicando las propiedades correspondientes:

a) $\log 2 + \log 6 =$

b) $\frac{1}{3} \log_5 \left(\frac{3}{5}\right) - \log_5 15 =$

c) $\log_{34} 5 - \log_{34} 7 =$

d) $3 \log x + 2 \log y - \log z =$

e) $\log a - \frac{1}{2} \log b + 2 \log c =$

Ejercicio 18: Calcular realizando convenientemente, un cambio de base

a) $log_2\ 10$ b) $log_5\ 2$ c) $log_{1/2}\ 20$ d) $log_4 0{,}1$.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Consideremos en particular $y = log_2\, x$.

Completemos la siguiente tabla:

x	1	2	4	8	1 / 2	1 / 4
y						

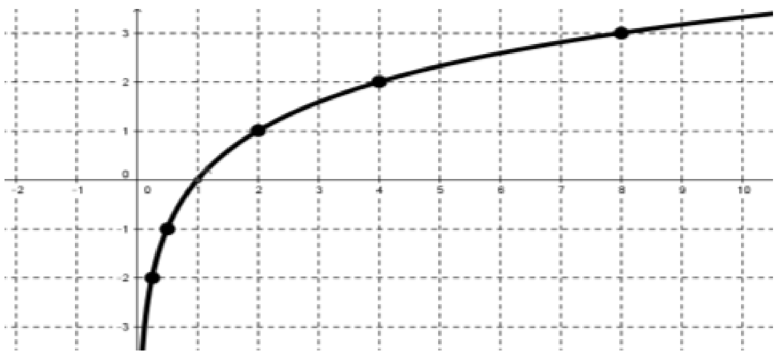
Luego para cada valor de x positivo, existe un único valor y, es decir, queda establecida una correspondencia biunívoca y por tanto los logaritmos pueden estudiarse como una relación funcional.

En general:

$$f{:}\,Dom(f) \to \mathbb{R}:\ f(x) = log_a x\ \ es\ llamada\ función\ lagarítmica$$

$$donde\ x > 0, \qquad a > 0\ con\ a \neq 1$$

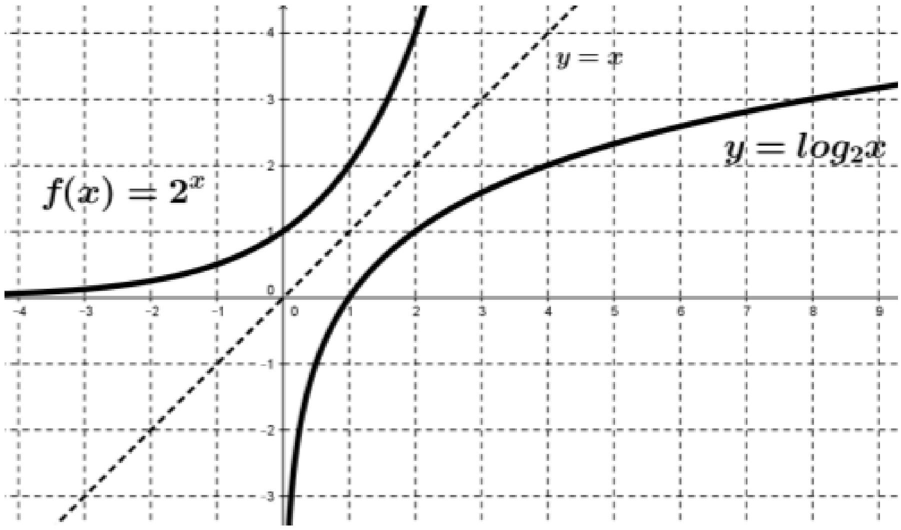
La representación gráfica de $y = log_2\, x$ es la siguiente:



Características de la función logarítmica $\boldsymbol{y = log_a x}$

- El dominio de la función logarítmica es **(**0,+∞**)**, es decir, el conjunto de reales positivos
- La imagen de la función logarítmica es *R*.
- $\log_a 1 = 0$ entonces $x = 1$ es raíz de f
- No presenta ordenada al origen pues 0 no pertenece al dominio de *f*.
- Es una función creciente.

Comparemos gráficamente la función logarítmica $y = log_2 x$ con la función exponencial $f(x) = 2^x$



Observamos que las funciones son simétricas respecto de la recta identidad y = x.

Ejercicio 19: En cada caso, calcular el dominio y graficar

a) $y = log_2(x+1)$ c) $y = ln(x)$ e) $y = -ln(x+2)$

b) $y = log_2(x-3)$ d) $y = ln(-x)$ f) $y = ln(x^2-1)$

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ya hemos resuelto algunas ecuaciones exponenciales utilizando logaritmos. Ahora resolveremos ecuaciones un poco más complejas y para ello utilizaremos las propiedades de los logaritmos.

Ejemplos: Calcular el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x \cdot 5^{2x} = 4$

Aplicando las propiedades de logaritmo y resolviendo la ecuación resultante en forma habitual

$$\log\,(3x \cdot 5^{2x}) = \log\,4$$

$$log 3^x + log\, 5^{2x} = log\,4$$

$$x \cdot log 3 + 2\,x\ log\,5 = log\ 4$$

$$x \cdot 0{,}477 + 2\,x \,.\, 0{,}699 \cong 0{,}602$$

$$x \cdot 0{,}477 + x \,.\, 1{,}398 \cong 0{,}602$$

$$x \cdot (0{,}477 + 1{,}398) \cong 0{,}602$$

$$x \cdot 1{,}875 \cong 0{,}602$$

$$x \cong 0{,}321$$

b) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 2431$

> **Recordar !**
>
> $a^{m+n} = a^m .\ a^n$
>
> $a^{-1} = 1/a$

$$3^{x+1} + 3^{x-1} = 2431$$

$$3 \cdot 3^x + 3^{-1} \cdot 3^x = 2431$$

$$3^x \left(3 + \frac{1}{3}\right) = 2431 \quad \text{(Extraemos } 3^x \text{ factor común)}$$

$$3^x \cdot \frac{10}{3} = 2431$$

$$3^x = 729{,}3$$

$$\log 3^x = \log\ 729{,}3 \quad \text{(Aplicamos logaritmo)}$$

$$x \cdot \log 3 = \log\ 729{,}3 \quad \text{(Por propiedad de logaritmo)}$$

$$x = \frac{\log\ 729{,}3}{\log\ 3}$$

$$x \cong 6{,}0003$$

c) $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} = -27$

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} = -27$$

$$(3^x)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3^x + 27 = 0$$

Sustituimos $z = 3^x$

> Consideremos $z = 3^x$, reemplazando en la ecuación, obtenemos una ecuación de segundo grado y encontramos las raíces.

$$z^2 - 12\,z + 27 = 0$$

la ecuación cuadrática con raíces

$$z_1 = 9 \qquad y \qquad z_2 = 3$$

Por lo tanto $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

$3^x = 3 \;\Rightarrow\; x = 1$

d) $25^x + 5^x = 20$

$$25^x + 5^x = 20$$

$$(5^x)^2 + 5^x - 20 = 0$$

Si reemplazamos $z = 5^x$ obtenemos una ecuación de segundo grado.

$$z^2 + z - 20 = 0$$

ecuación cuadrática con raíces $z_1 = 4$ y $z_2 = -5$.

Luego $5^x = 4 \;\Rightarrow\; x\, log5 = log\, 4 \;\Rightarrow\; x \cong 0{,}8613$

Atención!

Una vez obtenidas las soluciones no olvides verificar si las mismas satisfacen la ecuación

Si consideramos $5^x = -5$, vemos que no hay valores de x que cumpla la ecuación, pues ninguna potencia de 5 puede ser negativa.

Veamos ahora algunos ejemplos de ecuaciones logarítmicas:

a) $log_5\, 4\,x = 2$

$$log_5\, 4\,x = 2$$

$$4\,x = 5^2 \quad \text{(Aplicando la definición de logaritmo)}$$

$$x = \frac{25}{4}$$

b) $log_9\,(x+1) + log_9\, 9\,(x+1) = 2$

$$log_9\,(x+1) + log_9\, 9\,(x+1) = 2$$

$$log_9\, 9\,(x+1)^2 = 2$$

$$9\,(x+1)^2 = 9^2$$

$$(x+1)^2 = 9$$

$$|x+1| = 3$$

$$x + 1 = 3 \;\Rightarrow\; x_1 = 2$$

$x + 1 = -3 \;\Rightarrow\; x_2 = -4$ se descarta esta solución.

Atención!

Con la solución $x_2 = -4$ obtenemos

$log_9\,(-3) = x \Leftrightarrow 9^x = -3$

igualdad que no se verifica para ningún valor de x.

c) $2\, log_2^2 x - 10\, log_2 x + 8 = 0$

$$2\, log_2^2 x - 10\, log_2 x + 8 = 0$$

Considerando $z = log_2 x$.

$$2z^2 - 10z + 8 = 0$$

Las soluciones son $z_1 = 4$ y $z_2 = 1$

$log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$

$log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2^1 = 2$

d) $3\,log_2 x - 2\,log_4 x = 2$

$$3\,log_2 x - 2\,log_4 x = 2$$

Considerando $log_4 x = y \Leftrightarrow x = 4^y$

$$log_2 x = y\,log_2 4$$

$$log_2 x = y \cdot 2$$

$$y = \frac{1}{2}\,log_2 x$$

Importante!

Es necesario que todos los logaritmos involucrados en esta ecuación estén expresados en la misma base para poder utilizar las propiedades. Expresamos todos los logaritmos en base 2.

Reemplazando en la ecuación

$$3\,log_2 x - log_2 x = 2$$

$$2\,log_2 x = 2$$

$$log_2 x = 1$$

$$x = 2$$

Atención!

No olvides verificar las soluciones y descartar alguna si es necesario

e) $3^x \cdot 5^{2x} = 4$

$$3^x \cdot 5^{2x} = 4$$

$$log\,(3^x \cdot 5^{2x}) = log\,4$$

$$log\,3^x + log\,5^{2x} = log\,4$$

$$x \cdot 0{,}477 + 2x \cdot 0{,}699 \cong 0{,}602$$

$$x \cdot 0{,}477 + x \cdot 1{,}398 \cong 0{,}602$$

$$x \cdot (0{,}477 + 1{,}398) \cong 0{,}602$$

$$x \cdot 1{,}875 \cong 0{,}602$$

$$x \cong 0{,}321$$

Ejercicio 20: Calcular el valor de la incógnita:

a) $log_a\, x = log_a\, 9 - log_a\, 4$

b) $log_a\, x = 3\ (log_a 5 + 4\ log_a\, 2 - log_a\, 3)$

c) $log_a\, x = \dfrac{3\log_a 4}{5}$

Ejercicio 21: Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas

a) $log\ (x - 7) = 0$

b) $2log_3\, x - log_3(x + 6) = 1$

c) $log_2(2x - 7) + log_2\, x = 2$

d) $ln\ [log_2\ (x - 3)] = 0$

e) $log\ x + log(x - 1) = log\ (4x)$

f) $log_3\, (2x + 23) - log_3(x + 1) = 2$

g) $log_2\ [\ log_2\ (2x - 1)\ ] = 1$

h) $2(log_2\, x)^2 - 10log_2\, x + 8 = 0$

i) $log\ _3(\ x^2) + log_3 x - 6 = 0$

j) $log_2^2\, x\ -\ 5\ log_2\, x = 0$

Ejercicio 22: Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales

a) $e^{3-2x} = 4$

b) $3\ .\ 4^x + 6 = 0$

c) $4 + 3^{5x} = 8$

d) $3.\ 2^x + 5.\ 2^x = 4$

e) $2^{x+1} + 2^{x+3} = 20$

f) $3^{2x} - 3^x - 6 = 0$

g) $2^x + 4^x = 72$

h) $e^{2x} - e^x = 6$

i) $5^{x+2} - 10.\ 5^{x-1} = 23$

j) $e^{2x} - e^x = 0$

Ejercicio 23: En 1900 la población de una ciudad era de 50000 habitantes. En 1950 había 100000 habitantes. Asumamos que el número de habitantes en función del tiempo se ajusta a la fórmula $P(t) = c\ e^{kt}$ donde c y k son constantes. ¿Cuál fue la población en 1984?. ¿En qué año la población es de 200000 habitantes?

Ejercicio 24: Una partícula se mueve con velocidad $S(t) = c\ e^{-kt}$ donde c y k son constantes. Si la velocidad inicial en $t = 0$ es de 16 unidades por minuto, y en 2 minutos se reduce a la mitad, hallar el valor de t cuando la velocidad es de 10 unidades/minuto.

Ejercicio 25: ¿Qué relación debe existir entre a y b para que se verifique que $log\ a + log\ b = 0$?

Ejercicio 26: Si el punto (2; 5) pertenece a la gráfica de la función exponencial $y = p^x$, ¿cuál es el valor de p?

Ejercicio 27: Si a y b son dos números enteros positivos, calcular el valor de $log_{1/a}\, a + log_b \dfrac{1}{b}$.

GEOMETRÍA

Breve Introducción

La Geometría es una de las ramas más antiguas de la Matemática, la primera en desarrollarse como un cuerpo teórico ordenado, y este desarrollo fue luego tomado como referencia para el desarrollo de otras áreas matemáticas.
Así mismo, la Geometría desarrolló sus propias ramas: cada vez que las herramientas teóricas se mostraban insuficientes para resolver nuevos desafíos, distintos problemas prácticos motivaron el desarrollo de "nuevas geometrías".
Intentaremos en este módulo introducir el potencial de la Geometría para las aplicaciones, a la par de vislumbrar su importancia teórica.

Para precalentar: ¡Algunas ideas importantes!

Rectas Paralelas, Coincidentes y Secantes

Dos rectas en un mismo plano:

- Son ***secantes*** si y solo sí tienen un punto en común.

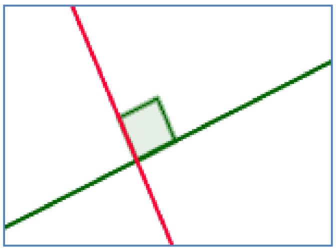
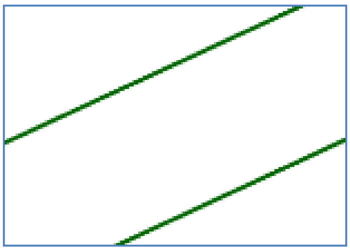
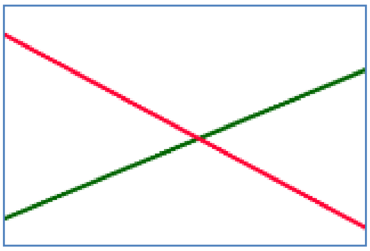
  También decimos "se intersectan" o "se cortan" en un punto.
- Son ***paralelas*** si no tienen ningún punto en común.
- Son ***coincidentes*** si tienen todos sus puntos en común.

Rectas Perpendiculares y oblicuas

- Dos rectas secantes son ***perpendiculares***, si y sólo si forman entre sí un ángulo recto .
- Dos rectas secantes son ***oblicuas*** si no son perpendiculares.

Ejercicio 1: a) Realizar un cuadro sinóptico con los conceptos recién expuestos.

b) En cada figura, identificar cuál par de rectas son: paralelas, perpendiculares y oblicuas.

.
…………………………………… …………………………………….. ……………………………………

Ejercicio 2: El siguiente plano corresponde al centro de la ciudad de La Plata. Observándolo, indicar:

a) Dos calles paralelas.

b) Dos calles oblicuas.

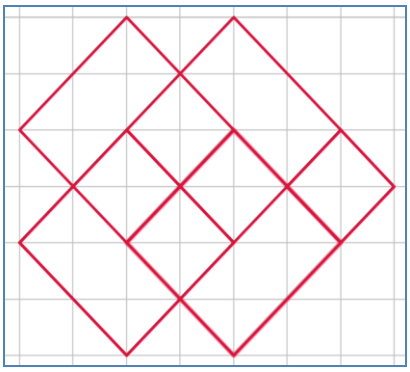
c) Dos calles perpendiculares.

d) Dos calles que forman un ángulo recto.

e) ¿Es verdadera la siguiente afirmación? Justificar tu respuesta:

"La Diagonal 73 es perpendicular a la Calle 11".

Ejercicio 3: Observar atentamente la siguiente figura y responde:



a) ¿Cuántos pares de rectas distintas paralelas hay?

b) ¿Cuántos pares de rectas distintas perpendiculares hay?

c) ¿Cuántos cuadrados puedes contar?

Ejercicio 4: Con regla y compás, trazar las rectas que se detallan:

1. Con la regla, traza una recta. Llámala **r**. Marcar un punto cualquiera sobre **r**, llámalo **M**.

2. Apoyar el compás en **M** y trazar un arco que corte a **r** en dos puntos más. Llamar a estos puntos **A** y **B**.

¿Qué puedes observar si comparas las *distancias* **AM** y **MB**?

3. Haciendo centro con el compás en **A**, realizar una marca sobre el arco, de la amplitud que desees. Sin modificar esta amplitud – es decir, sin cerrar o abrir más el compás – repetir este paso pero haciendo centro en **B**. La idea es obtener dos marcas sobre el arco trazado en el paso anterior.

4. Nuevamente con la regla, unir las dos marcas realizadas sobre el arco, y trazar una segunda recta, Denominar **p**. ¿Cómo son entre sí **r** y **p**?

Ejercicio 5: Sobre el gráfico realizado en el ejercicio 4, trazar la tercera recta que se detalla:

1. Centrando el compás en **A**, tomar una amplitud mayor a **AM**, pero no mayor a **B**.

2. Realizar una marca y repite el paso anterior centrando el compás en **B**, con la misma amplitud.

Buscar que sendas marcas se intersecten – o "*se corten*" -. Llamar **P** al punto de intersección así obtenido.

3. Con la regla, trazar la recta que une a **M** y a **P**; llamar **q**. ¿Cómo son entre sí **r** y **q**?

¿Y si comparas **p** y **q**?

Ejercicio 6: A partir de lo trabajado en los ejercicios 4 y 5 responder:

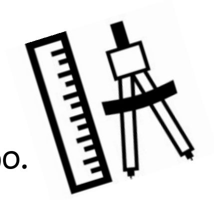
a) Si una recta es paralela a otra y ésta es paralela a una tercera, ¿Cómo son entre sí la primera y la tercera?

b) Si una recta es paralela a otra y ésta es perpendicular a una tercera, ¿Cómo son entre sí la primera y la tercera?

c) Si una recta es perpendicular a otra y ésta es paralela a una tercera, ¿Cómo son entre sí la primera y la tercera?

d) Si una recta es perpendicular a otra y ésta es perpendicular a una tercera, ¿Cómo son entre sí la primera y la tercera?

Los instrumentos por excelencia de la Geometría Clásica
son **la Regla y el Compás**.
Ambos derivan de la geometría egipcia, hecha con cuerdas.

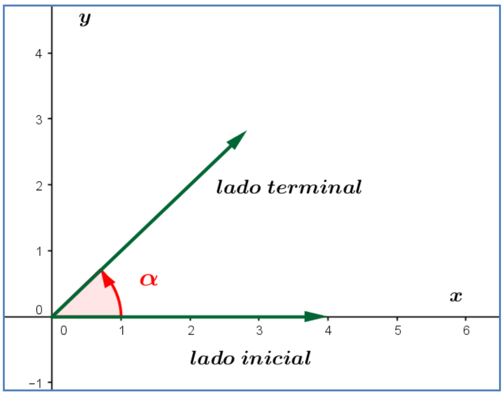


La regla permite unir dos puntos, tal como los conectaríamos
al tender una cuerda desde un origen hasta una posición de destino.

El compás permite trazar circunferencias, tal como haríamos
fijando un extremo de una cuerda en lo que sería el centro,
y haciendo girar la cuerda extendida.

Con estos instrumentos se pueden realizar distintas construcciones,
además de trasladar elementos y figuras,
reemplazando la noción de movimiento en el plano.

Ángulos Orientados en el Plano Cartesiano



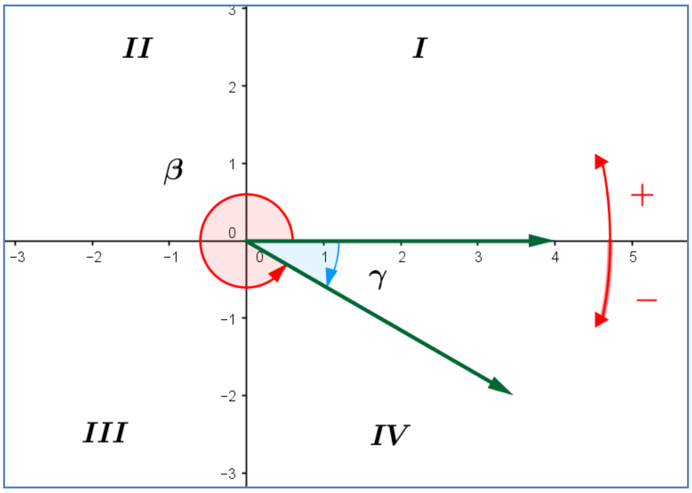
Así representamos ángulos en el plano cartesiano:

- El ángulo se centra en el origen de coordenadas: (0,0).
- Su lado inicial coincide con el eje de abscisas (eje x).
- La orientación puede ser en ***sentido antihorario*** como en el ejemplo que se ilustra, con ***signo positivo***;
- o bien el ángulo puede orientarse en ***sentido horario***, con ***signo negativo***.

Los ángulos se representan utilizando
letras del Alfabeto Griego. Puedes
verlas en el Apéndice.

Otra forma de representación de un ángulo es realizar una marca sobre la letra mayúscula que indica el origen del ángulo: $\widehat{O}$

El plano cartesiano se divide en cuatro ***cuadrantes*** que suelen representarse con números romanos, como vemos en el gráfico siguiente, donde también se representan los dos sentidos posibles para orientar los ángulos :



Sistemas de Medición de Ángulos: El Sistema Sexagesimal

¡Para leer y recordar!

- La unidad de medida del sistema sexagesimal se obtiene dividiendo un ángulo recto (R) en 90 partes iguales, y tomando una de ellas.

- Esta unidad se denomina ***grado sexagesimal*** y se denota : **1 °.**

$$1\,° = \frac{1R}{90} \qquad 1R = 90°$$

- A su vez, un grado se subdivide en 60 partes iguales, y una de estas partes se denomina ***minuto***. Se denota : **1'** . Luego **1 ° = 60 '**

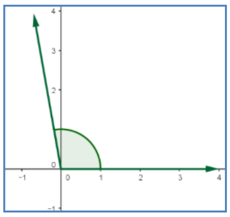
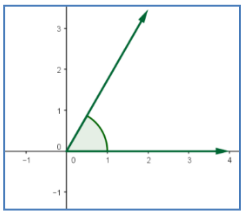
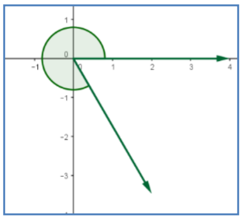
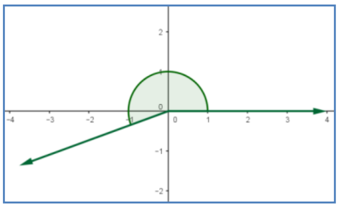
-Así mismo, un minuto se subdivide en 60 partes iguales; una de las cuales se denomina ***segundo***. Se denota : **1''**. Luego **1' = 60 ''.**

Ejercicio 7: a) ¿A qué cuadrante pertenecen los siguientes ángulos?

300°, 192°, 93°, 180° 1', 150°, 35°.

b) Expresar en grados, minutos y segundos : 23,18° ; 107,03°.

Ejercicio 8: Los ángulos dibujados miden 60°, 100°, 200° y 300°. Indicar cuál es cada uno de ellos y el cuadrante al cual pertenece. ¿En qué sentido están orientados?

Ejercicio 9: Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones referidas son falsas. Justificar.

a) Los lados terminales de α = 180° y de β° = 270°, son semirrectas opuestas.

b) α = - 100° pertenece al IV cuadrante.

c) Los lados terminales de α = 0° y de β° = 360°, son coincidentes.

d) 15 ° 24 ' = 924 '

e) 1 ° = 3600 ''

f) 132,5 ° = 132 ° 5 '

Sistemas de Medición de Ángulos: El Sistema Radial

¡Para leer y recordar!

- En el sistema radial la unidad de medida es el **radián**.

- Un ***radián*** es la amplitud del ángulo central que en una circunferencia determina un arco de la misma longitud que el radio. Se denota: **1 rad.**

En el gráfico se ilustra el ángulo de 1 radián de amplitud.

En toda circunferencia,

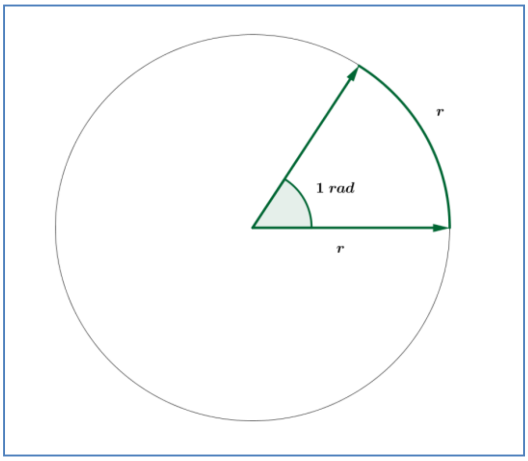
el radio está comprendido

2 π veces en su longitud.

Entonces, un ángulo de un giro

completo mide **2 π rad** .

… Es decir que:



$$360\,° = 2\,\pi\,rad$$

He aquí la **equivalencia entre los sistemas sexagesimal y radial.**

Ejercicio 10:

a) ¿Cuántos grados mide un radián?

b) Completar la siguiente tabla:

Grados	**0**	30º			**90º**		135º	150º		240º	270º		**360º**
Radianes	**0**		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{5}{3}\pi$	2π

Ejercicio 11:

a) Pasar a radianes las siguientes medidas: 25º 15 ’ , 31º 12’ 45”

b) Pasar las siguientes medidas a grados sexagesimales: 2,5 rad; 5π rad

Ejercicio 12:

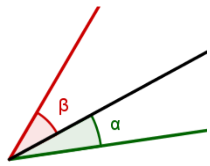
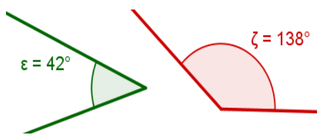
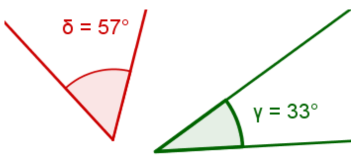
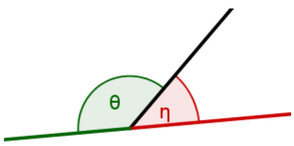
a) En una circunferencia de 10 cm de radio, un arco mide 6 cm. ¿Cuánto mide, en grados y en radianes, el ángulo correspondiente?

b) Un ángulo mide 3 radianes. Si dibujamos su arco tomando un radio de 5 cm, ¿Cuánto medirá dicho arco?

Relaciones entre Dos Ángulos

¡Para leer y recordar!

Dos ángulos son:

Consecutivos	Tienen un lado en común y ningún otro punto en común.	
Suplementarios	Su suma es un ángulo llano (180º) .	
Complementarios	Su suma es un ángulo recto (90º).	
Adyacentes	Tienen un lado en común y sus otros lados son semirrectas opuestas.	

Ejercicio 13: Un ángulo llano está formado por dos semirrectas opuestas. ¿Es correcto entonces afirmar que dos ángulos adyacentes, son suplementarios? Justificar tu respuesta.

Ejercicio 14:

a) Determinar dos ángulos suplementarios que se diferencien en 42º.

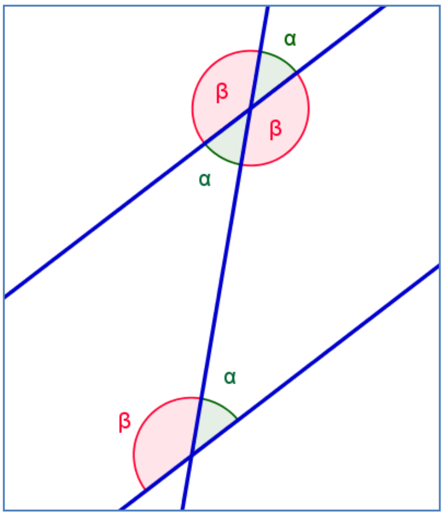
b) Determinar dos ángulos complementarios sabiendo que un es siete veces más grande que el otro.

c) Determinar dos ángulos complementarios que se diferencian en 15º.

Ángulos entre rectas paralelas

A partir del siguiente gráfico de dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal, podemos observar las siguientes propiedades:

Los ángulos opuestos por el vértice, son iguales.

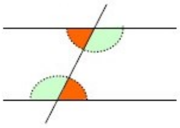
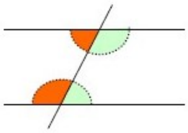
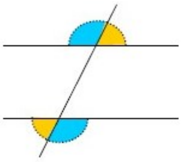
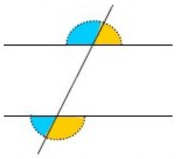
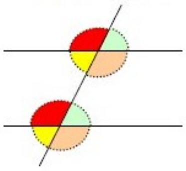
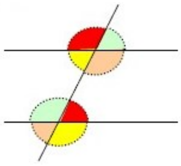


- La suma de dos ángulos diferentes es **180º.** Luego estos ángulos son suplementarios.

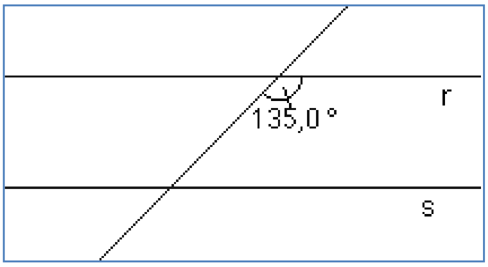
- La suma de todos los ángulos que se puedan delimitar tomando cualquier punto como vértice, es de **360º.**

Se pueden representar los ángulos alternos internos entre paralelas, dibujando una letra Z.

En la siguiente tabla se definen los ángulos entre paralelas tomados de a pares, según su posición:

ALTERNOS INTERNOS Se ubican a los lados opuestos de la secante ENTRE las paralelas. 	**COLATERALES INTERNOS** Se ubican del mismo lado de la secante y ENTRE las paralelas. 
ALTERNOS EXTERNOS Se ubican a los lados opuestos de la secante FUERA de las paralelas. 	**COLATERALES EXTERNOS** Se ubican del mismo lado de la secante y FUERA de las paralelas. 
CORRESPONDIENTE Se ubican del mismo lado de la secante, uno es interno y otro externo. 	**CONJUGADOS** Se ubican a los lados opuestos de la secante. Uno es interno y otro externo. 

Ejercicio 15: Las rectas **r**, **s** de la figura son paralelas.



a) Determinar la amplitud de todos los ángulos.

b) Determinar la suma de:

- Dos ángulos conjugados ………….
- Dos ángulos colaterales internos ………….
- Dos ángulos colaterales externos ………….

Ejercicio 16: Observar el gráfico del ejercicio 15 y en función de lo trabajado en este ejercicio y de los apuntes teóricos de la página anterior, responder:

a) ¿Cuántas amplitudes diferentes de ángulos hay? …………………………………………

b) ¿Cuánto vale la suma de dos ángulos de diferente amplitud? ………………………

Ejercicio 17: Completar las líneas de puntos con "a veces", "siempre" o "nunca".

a) Los ángulos complementarios ……………………. son iguales.

b) Los ángulos adyacentes ……………………………. son suplementarios.

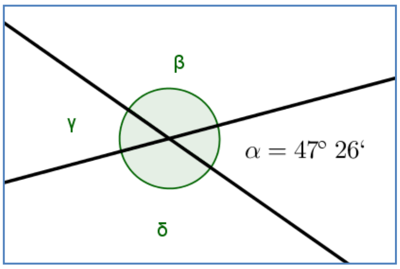
c) Los ángulos suplementarios ……………………….. son adyacentes.

d) Los ángulos adyacentes ……………………………… son consecutivos.

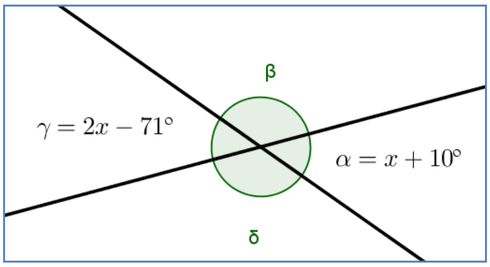
e) Los ángulos adyacentes ……………………………… son complementarios.

Ejercicio 18: Calcular las medidas de los ángulos α, β, γ y δ.

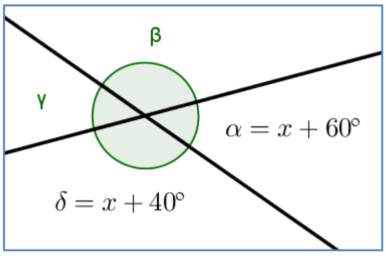
a)



b)

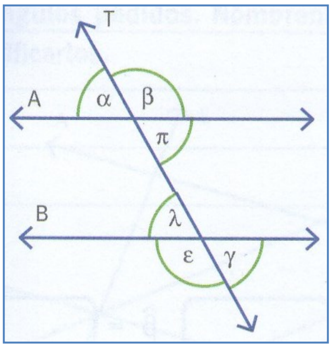


c)

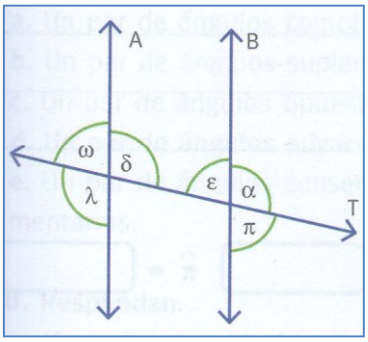


Ejercicio 19: Calcular la medida de los ángulos teniendo en cuenta los datos, en cada caso.

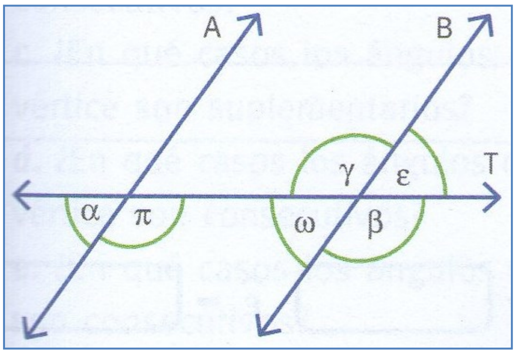
a) A // B y α= 47°



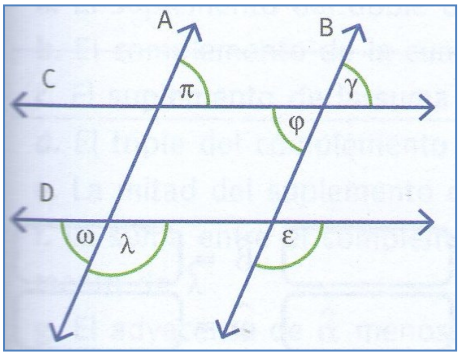
b) A // B y δ = 108° 26’



c) A // B y ε = 39° 52’



d) A // B , C // D y π = 56° 41’ 5”



Perímetro y Área

¡Para leer y recordar!

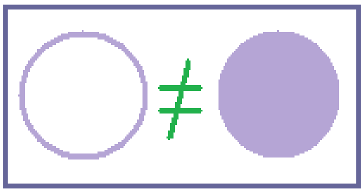
Definición:

- ***Perímetro*** es la medida del contorno de una superficie.
- ***Área*** es la medida de la superficie que delimita una figura cerrada.

Un ejemplo que ilustra estas dos definiciones, es la diferencia entre *Circunferencia* y *Círculo*:

La ***Circunferencia*** es el contorno de un círculo.

El perímetro de un círculo, es la medida de su circunferencia.



Circunferencia Círculo

Completar el espacio con la fórmula correspondiente:

Perímetro de la Circunferencia: ………………………

Por otra parte, el ***Círculo*** es la figura geométrica de limitada por una circunferencia.

Es decir: la circunferencia, y su interior.

El área de un círculo es la medida de su superficie.

Completar el espacio con la fórmula correspondiente:

Área del Círculo: ……………………………

Ejercicio 20: Dibujar en una hoja cuadriculada, tomando como unidad de área a un cuadradito y como unidad de perímetro a un lado de dicho cuadradito:

a) Tres figuras diferentes con igual área y diferente perímetro.

b) Tres figuras diferentes con igual perímetro y diferente área.

c) Tres figuras diferentes cuya área sea 8 u. a (unidades de área). Calcula sus perímetros.

d) Tres figuras diferentes cuyo perímetro sea 20 u. p (unidades de perímetro). Calcula sus áreas.

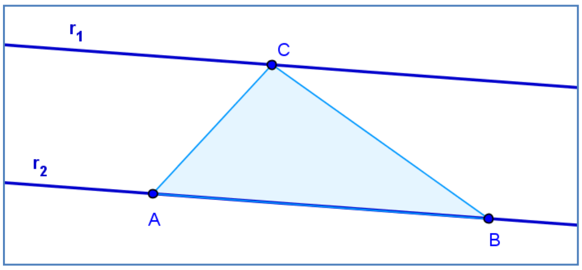
¡NO son términos equivalentes!

Ejercicio 21: Tenemos el siguiente triángulo ABC construido sobre las rectas r_1 y r_2.

Si r_1 y r_2 son paralelas, responder justificando tus respuestas:

a) ¿Qué ocurre con el área del triángulo ABC si movemos el punto A a lo largo de r_2?

b) ¿Y si movemos el punto C sobre r_1?



Ejercicio 22: Responder si las siguientes afirmaciones son Verdadero o Falso. Justificar las respuestas falsas.

a) Si disminuye la altura de un rectángulo, entonces también disminuye su perímetro.

b) Un paralelogramo tiene un lado que mide 3 cm y otro que mide 6 cm. Su área es imposible de calcular con estos datos.

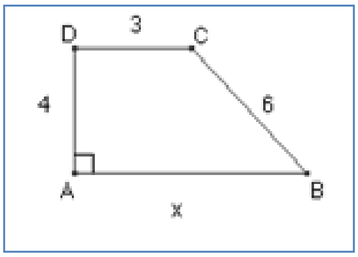
c) Un cuadrado de perímetro igual a 24 cm, tiene un área de 24 cm^2.

d) Se dibuja un rombo con su diagonal mayor que mide 8 cm, y su lado que mide 5 cm. El perímetro de la figura es de 40 cm.

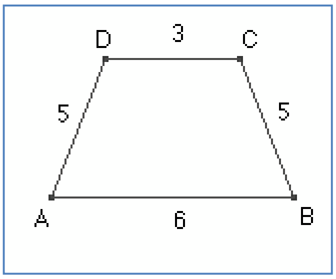
e) Se tiene un primer rectángulo de base igual a 15 m y de altura igual a 6 m, y un segundo rectángulo cuya base es disminuye en 3 m y su altura aumenta en 3 m con respecto al primero. Entonces el área del segundo rectángulo es la misma que el área del primero.

Ejercicio 23: Dados los siguientes trapecios, calcular en cada caso lo requerido.

a) Trapecio Rectángulo. Hallar su área y su perímetro.



b) Trapecio Isósceles. Hallar su área y su altura.



Ejercicio 24: El cuadrado y el triángulo equilátero de la figura, verifican la siguiente relación:

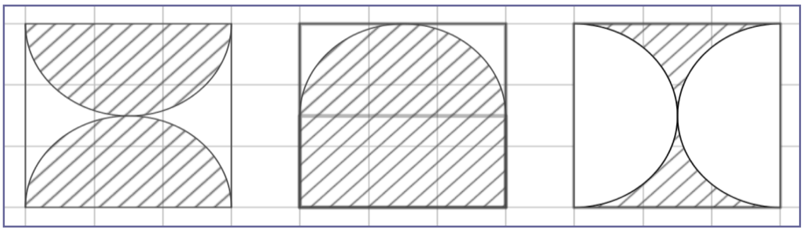
"El perímetro del triángulo es igual a las tres octavas partes del perímetro del cuadrado".

a) Escribir la expresión del perímetro del cuadrado en relación a a.

b) Si el perímetro del cuadrado es de 120 cm, indicar cuántos cm miden el lado del triángulo y el lado del cuadrado, respectivamente.

Ejercicio 25:

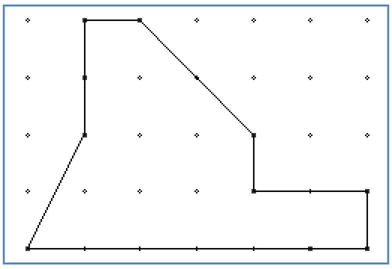
Calcular el perímetro y el área de las siguientes figuras rayadas, en función del radio **r** del círculo.



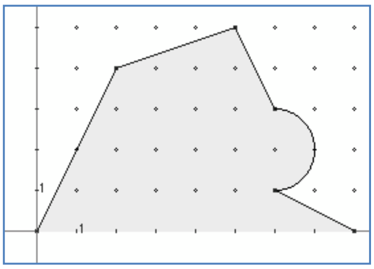
Ejercicio 26: ¿Existe alguna circunferencia cuya longitud, medida en cm, sea igual al área de su círculo, medida en cm^2? Realizar el planteo y resolver la ecuación resultante.

Ejercicio 27: En cada caso, hallar el área y el perímetro de cada figura compuesta, descomponiendo la misma en figuras más sencillas. Tomar como unidad de referencia que un lado de la cuadrícula = 1 cm.

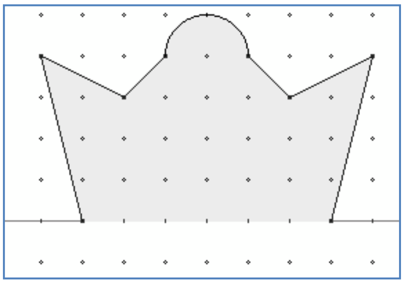
a)



b)

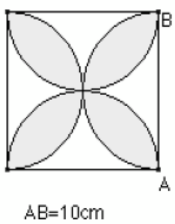


c)

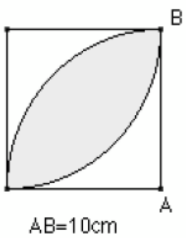


Ejercicio 28: Calcular en cada caso, el ***área*** y el ***perímetro*** de la figura sombreada.

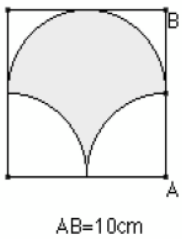
a)



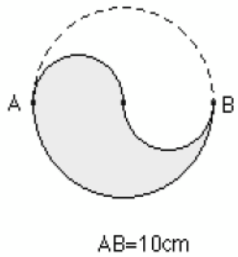
b)



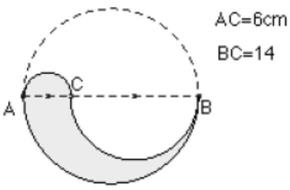
c)



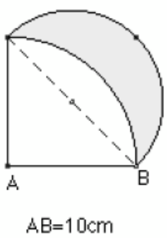
d)



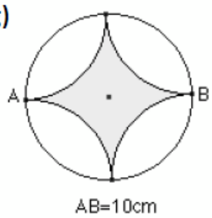
e)



f)



g)



Ángulos interiores de un triángulo

Pensemos en un triángulo cualquiera y en sus ángulos interiores.

Intuitivamente es claro lo que sigue (*por qué?*):

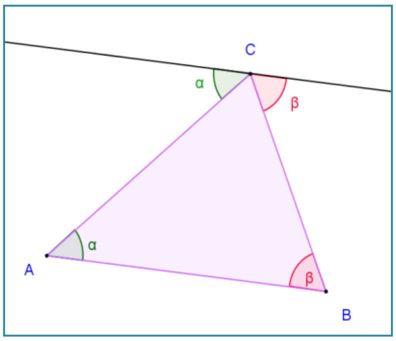
- Ninguno de los ángulos interiores puede medir 180º
- Tampoco es posible que dos de estos ángulos midan 90º

… ¿Qué podemos decir de los tres ángulos? :

En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180º.

… La demostración se deduce a partir de la siguiente figura. ¿La razonamos juntos?

-Trazamos la paralela al lado AB que pasa por C.



-Aplicamos la “regla de la Z” y podemos ver dos pares de ángulos alternos internos: α y β.

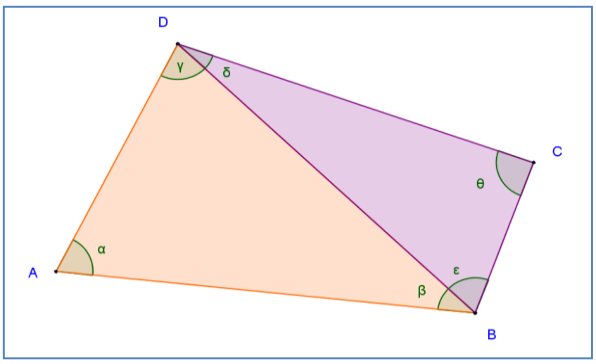
-A su vez, α y β son dos de los ángulos interiores del triángulo ABC. Entonces mirando sobre C:

¡vemos que la propiedad se cumple!

… y así hemos demostrado nuestro primer teorema.

Ejercicio 29: Observar el siguiente gráfico y completar lo indicado.

Consideremos un cuadrilátero cualquiera ABCD y dividámoslo en dos triángulos.



Sabemos que en el triángulo ABD, la suma de sus ángulos interiores $\alpha + \beta + \gamma =$………………… (1)

La suma de ángulos interiores del triángulo BCD: ………………… (2)

Sumando los resultados (1) y (2), obtenemos: ……………………………………

Concluimos que:

En todo cuadrilátero, la suma de los ángulos interiores es igual a ....

Ejercicio 30: En un paralelogramo, la suma entre la mitad de uno de sus ángulos y la tercera parte de otro, no opuesto con el primero, es igual a 79º.

¿Cuál es la amplitud de los ángulos interiores del paralelogramo?

a) Representar gráficamente el enunciado construyendo un paralelogramo cualquiera.

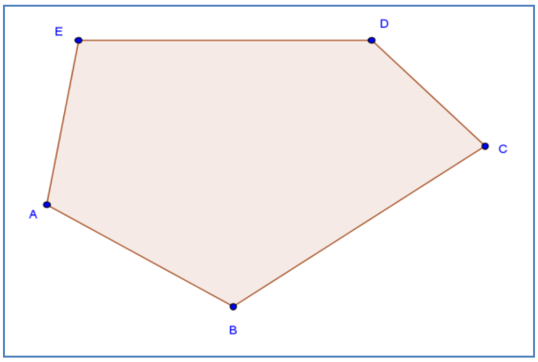
b) Llama x a uno de los ángulos del enunciado, e y al otro. Escribir la ecuación a partir de:

La suma entre la mitad de uno de sus ángulos y la tercera parte de otro (…) es igual a 79º.

c) Este problema tiene dos incógnitas. En base al trabajo realizado en el ejercicio 29 proponer la segunda ecuación necesaria para resolverlo.

d) Ahora has logrado escribir el sistema de dos ecuaciones lineales que el enunciado requiere. Resolver este sistema y encontrar la amplitud de los ángulos.

Ejercicio 31: Elegir uno de los vértices del siguiente pentágono ABCDE y a partir de él descompone la figura en triángulos. Repetir el procedimiento realizado en el ejercicio 29 y determinar cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un pentágono.



Ejercicio 32: Observar tu trabajo realizado para determinar los ángulos interiores del triángulo, el cuadrilátero y el pentágono.

a) Registrar en la tabla cuántos vértices tiene, en cuántos triángulos fue representado, y el valor de la suma de los ángulos interiores de cada polígono.

	Nº de vértices	**Nº de triángulos**	**Suma de los ángulos interiores**
Triángulo			
Cuadrilátero			
Pentágono			

b) Observando esta información, encontrar una expresión para la suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera, en relación al número de vértices **n**.

Verificar que la misma se cumpla para otros polígonos con más lados.

Razones y Proporciones

¡Para leer y recordar!

Definición :

- Una *razón* es el cociente indicado entre dos cantidades.
- La razón entre dos cantidades a y b , con b $\neq$ 0 y se indica $\frac{a}{b}$.
- Por ejemplo, la razón entre 2 y 5 es $\frac{2}{5}$

Ejercicio 33: Completar el cuadro:

Lenguaje Coloquial	***Razón***
De cada ….. familias que tienen televisión, ….. están abonadas al cable.	$\frac{5}{8}$
En una ciudad, 32 de cada 50 alumnos del nivel inicial concurren a escuelas públicas.	
En una provincia, para las elecciones de presidente del 2015, no concurrieron a votar …… de cada …….. electores.	$\frac{16}{100}$
En una escuela, cuatro de cada doce alumnos aprobaron todas las evaluaciones del primer trimestre.	

Definición : ***¡Para leer y recordar!***

- Una *proporción* es la igualdad entre dos razones.
- En símbolos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ donde b y c no pueden ser nulos (escribimos: $b \neq 0, \ d \neq 0$)
- De la definición surge la siguiente ***propiedad***: $a \cdot d = b \cdot c$

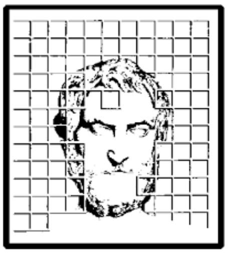
Ejercicio 34: El perímetro de un triángulo ABC es igual a 30 cm. Además, se pueden establecer las siguientes proporciones entre sus lados:

$$\frac{a}{18\ cm} = \frac{b}{15\ cm} = \frac{c}{12\ cm}$$

¿Cuánto miden los lados a, b, y c?

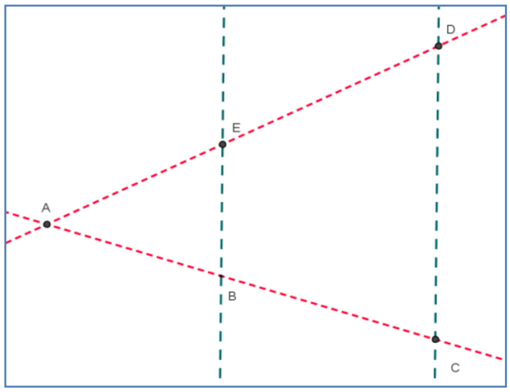
El Teorema de Thales

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, entonces los segmentos correspondientes entre cada recta transversal resultan ser proporcionales.



Thales (640 – 550 a.C) fue un comerciante de la ciudad de Mileto (Grecia) que se dedicó a estudiar filosofía y matemática. Logró aportes teóricos que hicieron de la Geometría una ciencia, y no sólo una herramienta para contar o medir.

El siguiente gráfico muestra la situación que describe el enunciado del teorema.



Las rectas BE y CD son **paralelas**.

Estas rectas son cortadas por otras dos rectas llamadas transversales

Este teorema enuncia que los segmentos formados de manera correspondiente entre cada paralela, son ***proporcionales***.

Es decir:

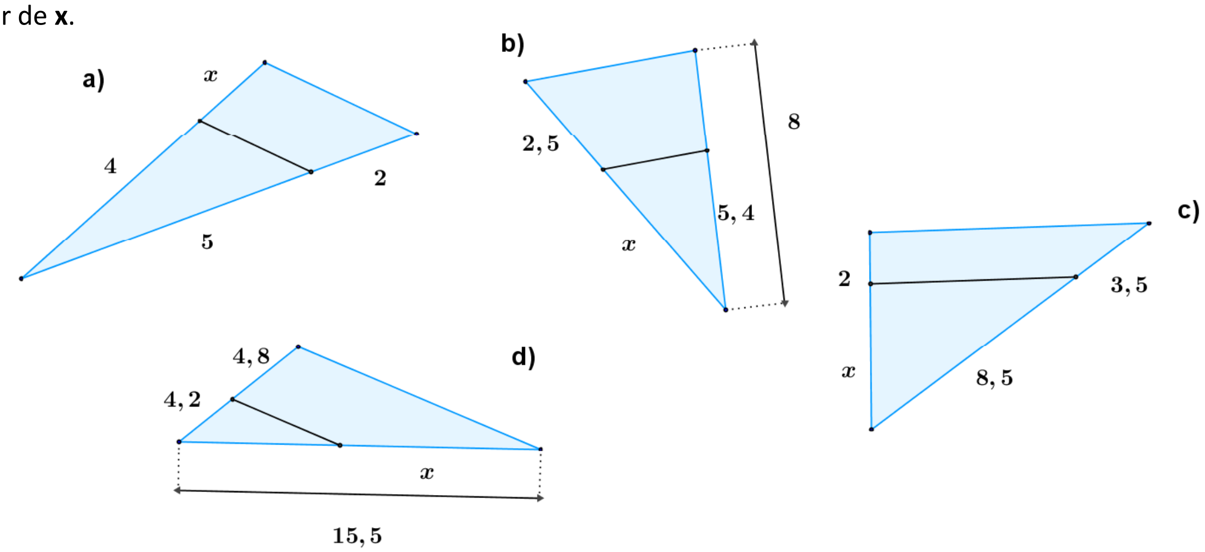
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$$

Ejercicio 35: Teniendo en cuenta el gráfico anterior, y sabiendo que:

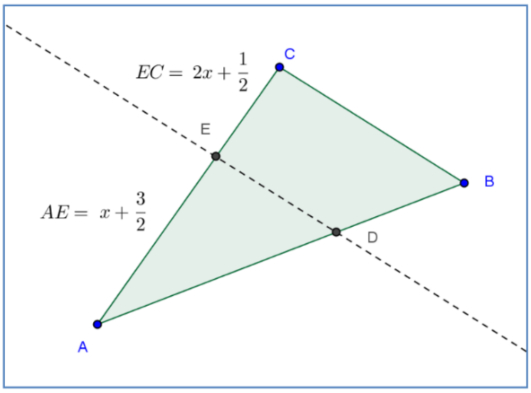
AB = 15 cm BC = 5 cm AE = x + 15 cm ED = x

Aplicar el teorema de Thales para conocer cuánto miden los segmentos AE y ED.

Ejercicio 36: En cada uno de los triángulos se ha trazado un segmento paralelo a uno de sus lados. Hallar el valor de **x**.



Ejercicio 37: Teniendo en cuenta los datos de la figura, y sabiendo que la recta ED es paralela a BC, AB = 16 cm, y DB = 9 cm, calcular las medidas de los segmentos AE y EC.



Triángulos Semejantes

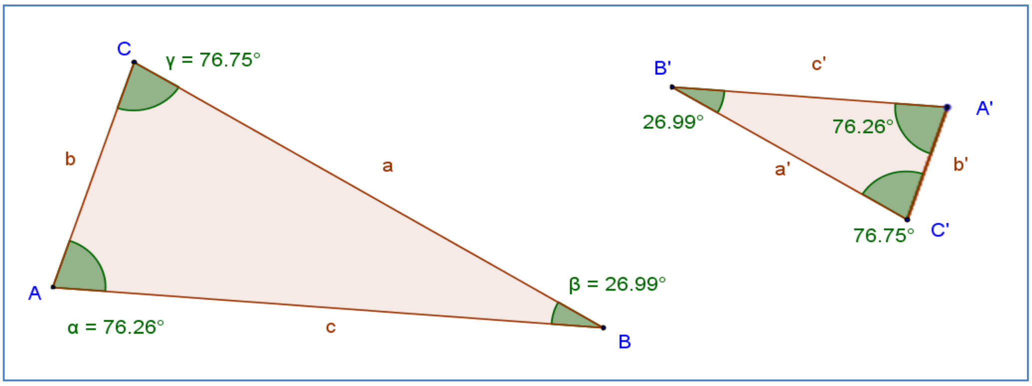
Definición: ***¡Para leer y recordar!***

Dos triángulos son *semejantes* cuando:

- Sus lados respectivos son proporcionales, y
- Los ángulos que forman pares de lados proporcionales, son iguales.

Los pares de lados proporcionales entre sí se denominan **homólogos**.

Dados dos triángulos semejantes, no es posible "moverlos" para que uno coincida con el otro, pero podemos pensar que uno es un *modelo a escala* del otro.



En el ejemplo que se ilustra, la proporción que se establece entre los respectivos lados de cada triángulo es la siguiente:

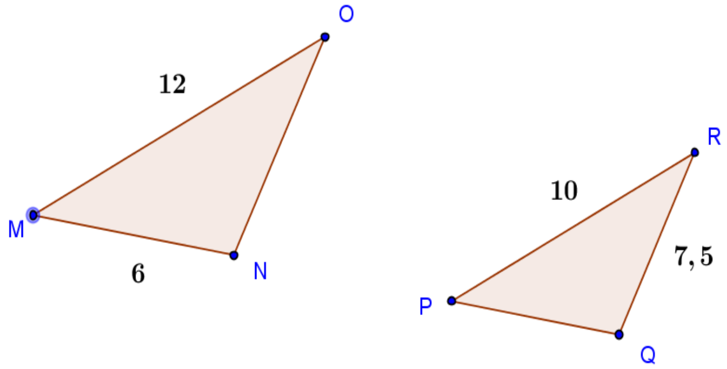
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

… donde (a, a'); (b, b') y (c, c') son pares de lados homólogos, y los ángulos formados por pares de lados homólogos, son iguales.

Ejercicio 38: Los triángulos MNO y PQR son semejantes. OM y RP son homólogos.

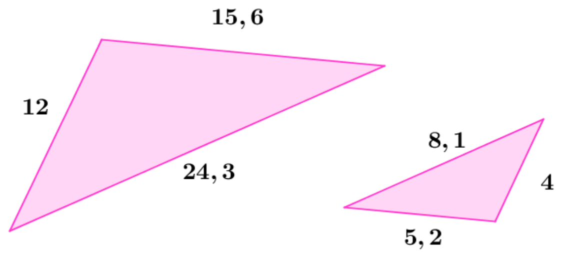
a) Indicar las medidas de los lados NO y PQ.

b) Comprobar si la razón entre los perímetros de los triángulos es igual a la razón entre los lados homólogos.

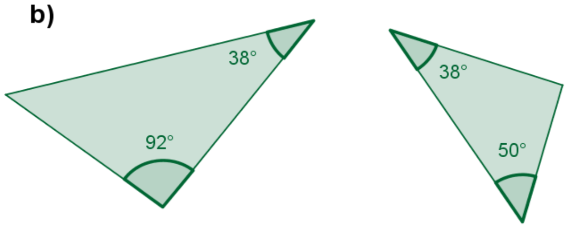


Ejercicio 39: En cada caso, considerar la información dada para determinar si los pares de triángulos son semejantes. Justificar tu respuesta.

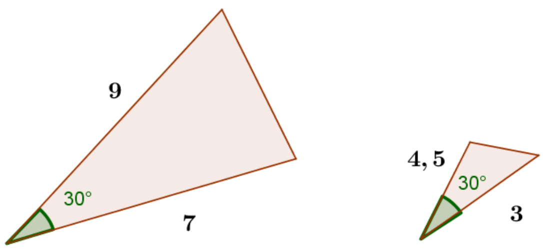
a)



b)



c)



Criterios de Semejanza de Triángulos

Para poder asegurar que dos triángulos son semejantes, basta con que se cumplan algunas condiciones específicas:

¡Para leer y recordar!

Criterio Ángulo – Ángulo – Ángulo (A – A – A)

Si dos triángulos ABC y A'B'C' tienen dos ángulos iguales ($\hat{A}$ con $\hat{A}'$, $\hat{B}$ con $\hat{B}'$), entonces el ángulo C es igual al ángulo $\hat{C}'$ y los triángulos son semejantes.

Criterio Lado – Lado – Lado (L – L – L)

Si los lados de los triángulos ABC y A'B'C' son proporcionales: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

entonces los triángulos son semejantes.

Criterio Lado – Ángulo – Lado (L – A – L)

Si dos lados de los triángulos ABC y A'B'C' son proporcionales, es decir: $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

y los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{A}'$ comprendidos entre ellos son iguales, entonces los triángulos son semejantes.

Ejercicio 40: Sean los triángulos ABC y A'B'C'. Sabemos que

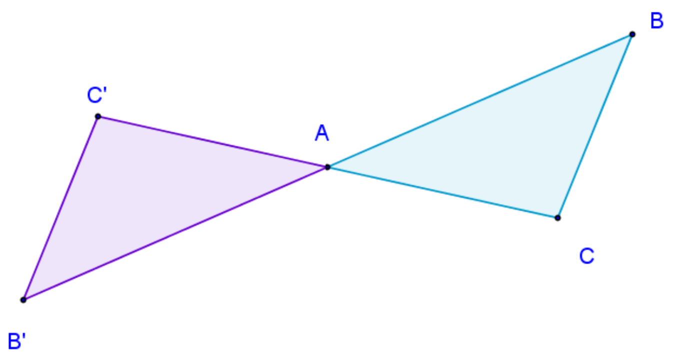
$$\begin{array}{ll} a = 4\ cm & a' = 6\ cm \\ b = 6\ cm & b' = 9\ cm \\ c = 8\ cm & c' = 12\ cm \end{array}$$

¿Son semejantes? ¿Qué criterio se aplica para decidir si lo son?

Ejercicio 41: En la siguiente figura, se sabe que $\overline{AB} = \overline{AB'}$ y que $\overline{AC} = \overline{AC'}$.

¿Son semejantes los triángulos ABC y A'B'C'?

¿Qué criterio se aplica para decidir si lo son?

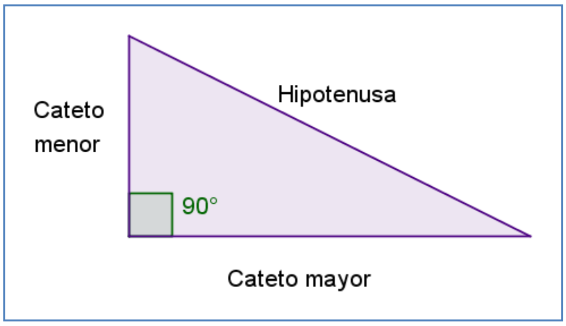


El Triángulo Rectángulo

Así se denomina a todo triángulo cuyo uno de sus ángulos interiores es recto.

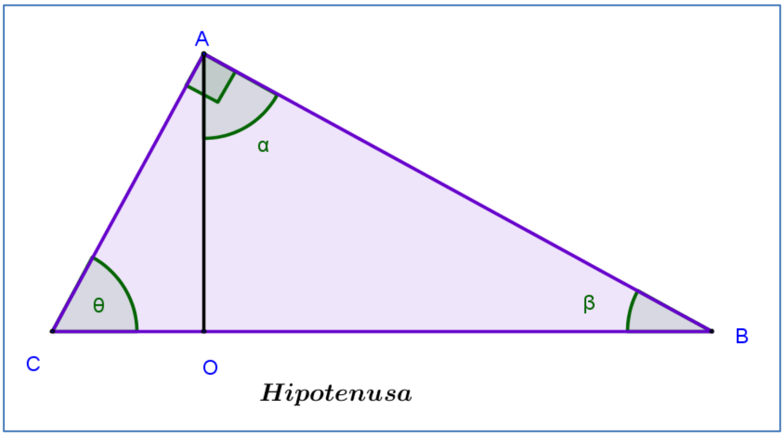
También sus lados reciben nombres especiales.

Los lados que forman el ángulo recto son llamados ***catetos***, y el lado opuesto al ángulo recto se llama ***hipotenusa***.



Triángulos Rectángulos y Semejanza

Si en un triángulo rectángulo ABC trazamos la recta que es perpendicular a la hipotenusa y que pasa por el vértice opuesto, quedan determinados dos nuevos triángulos rectángulos AOB y AOC:



Los tres triángulos AOB, AOC y ABC tienen un ángulo recto. Por lo tanto, si logramos demostrar que tienen otro ángulo igual, podremos aplicar el criterio A – A – A y asegurar que son semejantes.

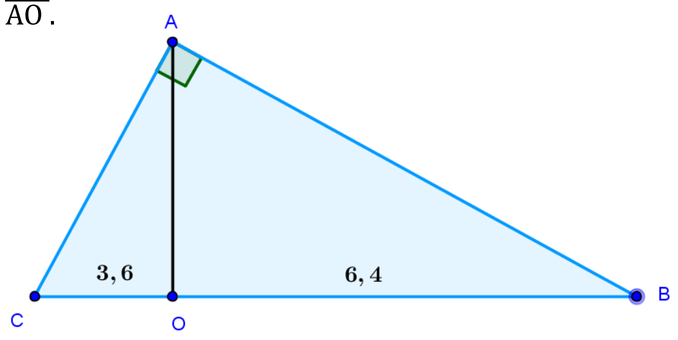
- Los triángulos ABC y AOC tienen el ángulo θ en común.
- Los triángulos ABC y AOB tienen el ángulo β en común.
- Además, en el triángulo AOB : $\alpha + \beta = 90\,°$ y en el triángulo ABC : $\beta + \theta = 90\,°$

  … Por lo tanto $\alpha = \theta$,

  y por el criterio A – A – A, **los triángulos AOB, AOC y ABC son semejantes,**

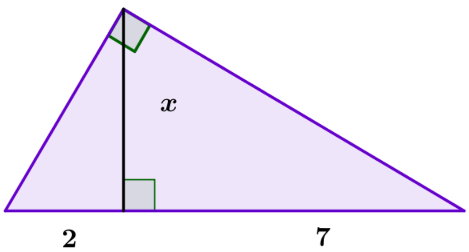
  y $\frac{\overline{\mathbf{CO}}}{\overline{\mathbf{AO}}} = \frac{\overline{\mathbf{AO}}}{\overline{\mathbf{OB}}} = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{AB}}}$ **pues estos lados forman respectivamente los ángulos de 90** °.

Ejercicio 42: El triángulo ABC es rectángulo en el vértice A, y $\overline{AO}$ es perpendicular a la hipotenusa. Calcular la medida de $\overline{AO}$.

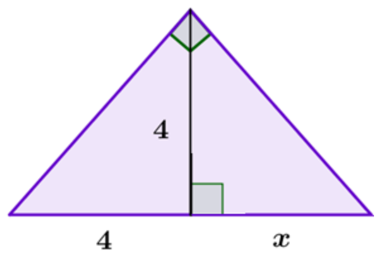


Ejercicio 43: En los siguientes triángulos rectángulos, hallar en cada caso el valor de x.

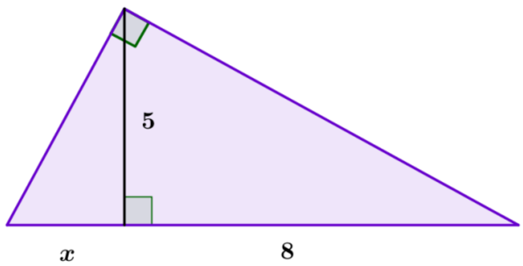
a)



b)



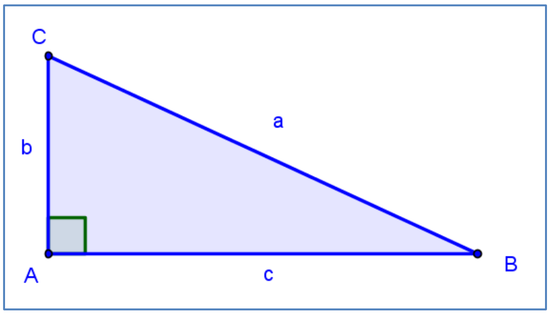
c)



El Teorema de Pitágoras

Este teorema enuncia una relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Si llamamos ***a*** a la longitud de la hipotenusa, y **b** y **c** a la longitud de los catetos, tenemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



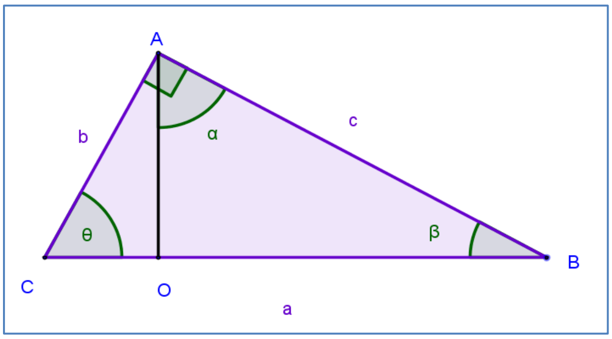
Hay diversas demostraciones de este teorema. Aquí presentamos una que aplica lo que se ha trabajado en relación a los triángulos rectángulos semejantes:

Recuperando el gráfico realizado en el anterior apartado, observa las siguientes equivalencias para las denominaciones de los lados de los triángulos:

$\overline{\mathbf{BC}} = \overline{\mathbf{CO}} + \overline{\mathbf{OB}} = \mathbf{a}$ es la hipotenusa

$\overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{b}$ es el cateto menor

$\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{c}$ es el cateto mayor



Ya se ha mostrado que los triángulos ABC, AOC y AOB son rectángulos y semejantes.

Tomando los triángulos ABC y AOC, y mirando los lados que respectivamente forman el ángulo θ:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{\overline{\mathbf{CO}}} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{a}.\left(\overline{\mathbf{CO}}\right) = \mathbf{b}^2 (1)$$

Tomando los triángulos ABC y AOB, y mirando los lados que respectivamente forman el ángulo β:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}}{\overline{\mathbf{OB}}} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{a}.\left(\overline{\mathbf{OB}}\right) = \mathbf{c}^2 \qquad (2)$$

Si ahora sumamos miembro a miembro, las igualdades 1 y 2 : (1) + (2)

$$\mathbf{a}.\left(\overline{\mathbf{CO}}\right) + \mathbf{a}.\left(\overline{\mathbf{OB}}\right) = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$
$$\mathbf{a}.\left(\overline{\mathbf{CO}} + \overline{\mathbf{OB}}\right) = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$
$$\mathbf{a}.\mathbf{a} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$
$$\boldsymbol{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$

…¡ y así demostramos el Teorema de Pitágoras!

El **teorema de Pitágoras** establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

También se verifica el r**ecíproco del teorema de Pitágoras:**

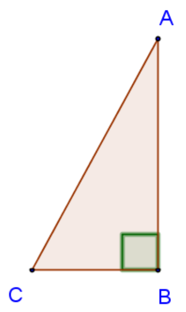
Si en un triángulo, el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.

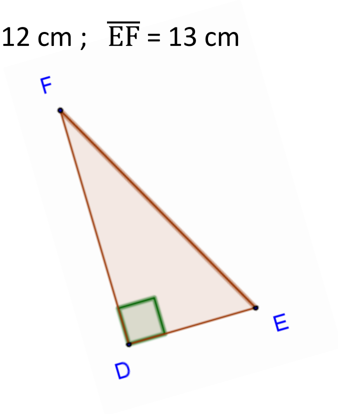
Ejercicio 44: i) Identificar en cada triángulo la hipotenusa y los catetos.

ii) Calcular el valor de los lados que faltan en cada triángulo.

iii) Hallar el perímetro y el área de cada triángulo.

a) Datos: $\overline{AC}$ = 8 cm; $\overline{AB}$= 6 cm b) Datos : $\overline{DF}$ = 12 cm ; $\overline{EF}$ = 13 cm





Ejercicio 45: Completar la tabla siguiente, donde **a**, **b** y **c** son las medidas de los lados un triángulo ABC, y en particular **a** es la medida del lado mayor.

a	B	c	¿Es ABC un triángulo rectángulo?
10	8	4	
13	5		sí
	8	15	sí
25	7		sí

Ejercicio 46: Una escalera de 2,5 m de longitud está apoyada en una pared, separada en 1,5 m del zócalo. Llega a una altura de 1,8 m.

a) Graficar la situación planteada.

b) ¿Fue la pared construida en escuadra? Es decir: ¿Forman la pared y el piso un ángulo recto?

Ejercicio 47: Si se sabe que uno de los lados de un rectángulo mide 3 dm y su diagonal 6,5dm, calcular el perímetro y el área del rectángulo. Expresar el resultado en cm y cm^2.

Ejercicio 48: Calcular

a) El área de un triángulo isósceles de 26 cm de perímetro, cuya base mide 6 cm.

b) El perímetro de un trapecio isósceles de 18,75 cm^2 de área, cuyas bases menor y mayor miden 4 cm y 8,5 cm respectivamente.

Ejercicio 49: El área de un rectángulo es de20cm^2 y un lado mide 0,10 m. Calcular el perímetro y la diagonal del rectángulo en cm.

Ejercicio 50: El área de un trapecio isósceles es de$20cm^2$y las bases miden 7 cm y 3 cm.

Calcular la altura y el perímetro del trapecio.

Ejercicio 51: Se tiene un rombo cuya diagonal mayor mide 300 cm y su diagonal menor, 2,5 m.

Calcular su perímetro expresado en m.

Razones Trigonométricas

¡Para leer y recordar!

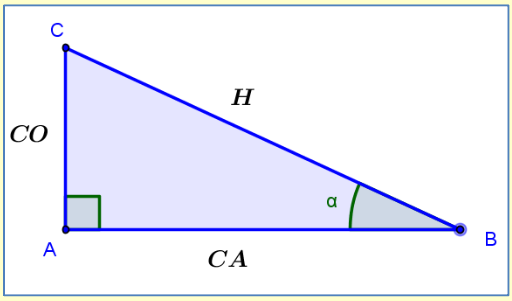
Definición:

Llamamos *razones trigonométricas* del ángulo α

de un triángulo rectángulo a los siguientes cocientes:

Seno : $\boldsymbol{sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha\ \ (CO)}{hipotenusa\ \ (H)}}$

Coseno: $\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente\ a\ \alpha\ \ (CA)}{hipotenusa\ \ (H)}}$



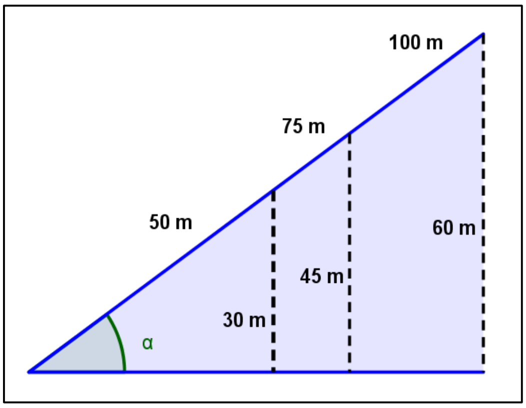
Tangente : $\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha\ \ (CO)}{cateto\ adyacente\ a\ \alpha\ \ (CA)}}$

Ejercicio 52: El tramo inicial de uno de los juegos de un parque de diversiones consiste en un carrito sobre una rampa que forma un ángulo α con respecto al piso, como se observa en el esquema.

1) Cuando el carrito recorre 50 m sobre la rampa, llega a una altura de 30 m.

2) Cuando recorre 75 m, está a 45 m de altura.

3) Y cuando recorre 100 m, está a 60 m de altura.



a) Completar la tabla escribiendo las razones trigonométricas correspondientes.

	sen α	cosα	tg α
Posición 1			
Posición 2			
Posición 3			

b) Simplificar todo lo que puedas las fracciones registradas. ¿Qué puedes concluir?

Razones Trigonométricas Exactas de Tres Ángulos Agudos

Analizaremos los siguientes ángulos utilizando el sistema radial para familiarizarnos con él.

Caso 1 : $\boldsymbol{\alpha = 45^{\,o}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}}$

Este ángulo determina un triángulo rectángulo isósceles (¿por qué?)

Tomemos como referencia que el caso particular en que los catetos tienen valor 1 unidad de longitud, puesto que se ha verificado que las razones trigonométricas se mantienen constantes independientemente de los valores de los lados del triángulo en cuestión.

Aplicando el teorema de Pitágoras para conocer la hipotenusa, se tiene que:

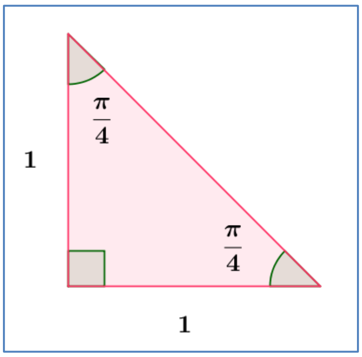
$H = \sqrt{2}$ (¿por qué?)

Entonces

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$



Caso 2: $\boldsymbol{\alpha = 30^0 = \frac{\pi}{6}}$; $\boldsymbol{\beta = 60^0 = \frac{\pi}{3}}$

Partimos ahora de un triángulo equilátero cuyos lados miden 2 unidades de longitud.

Por ser equilátero, sabemos que los ángulos interiores de este triángulo miden todos 60 º.

Tomando el triángulo rectángulo que se genera al trazar la perpendicular de la figura, vemos que el mismo tiene dos ángulos interiores de amplitud $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$ respectivamente.

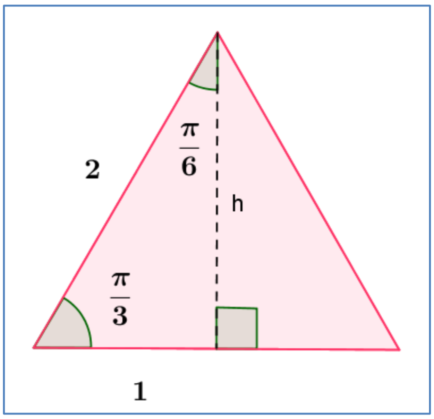
Aplicando el teorema de Pitágoras para conocer el cateto mayor, se tiene que:

$h = \sqrt{3}$ (¿por qué?)

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ $\qquad$ $tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

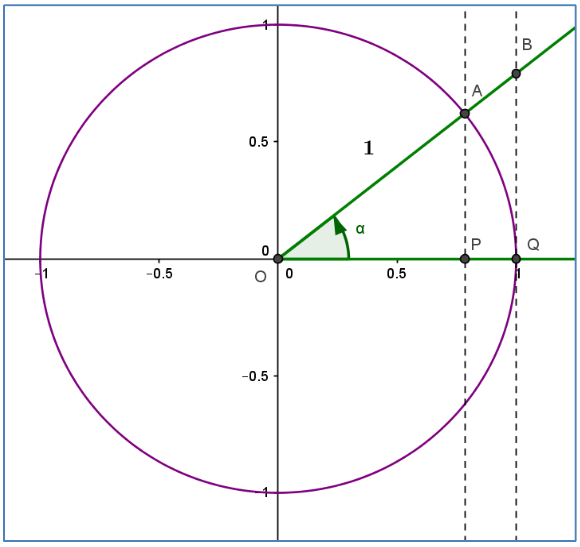
Ejercicio 53: Escribir las razones trigonométricas exactas de los siguientes ángulos expresados en radianes:

$$\mathbf{0} \;, \; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \;, \; \boldsymbol{\pi}$$

La Circunferencia Goniométrica o Unitaria

Esta circunferencia está centrada en el origen de coordenadas del plano cartesiano, y su radio tiene una unidad de longitud.

Los ángulos representados en el plano cartesiano determinan triángulos rectángulos cuya hipotenusa tiene longitud 1, al intersectar su lado terminal con la circunferencia.



$$\textbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\overline{\mathbf{AP}}}{\overline{\mathbf{OA}}} = \frac{\overline{\mathbf{AP}}}{\mathbf{1}} = \overline{\mathbf{AP}} \qquad \textbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\overline{\mathbf{OP}}}{\overline{\mathbf{OA}}} = \frac{\overline{\mathbf{OP}}}{\mathbf{1}} = \overline{\mathbf{OP}}$$

Entonces $\quad$ **sen α** es la ordenada del punto A y **cos α** es la abscisa del punto A.

Ejercicio 56: Escribir la expresión que se establece para la tangente del ángulo α a partir del gráfico proporcionado de la circunferencia goniométrica.

Razones Trigonométricas y Uso de la Calculadora

Veamos cómo usar la calculadora científica para trabajar con razones trigonométricas:

Las teclas **sin**, **cos** y **tan** nos permiten hallar el valor aproximado del seno, coseno y la tangente del ángulo que ingresamos a la calculadora.

- Primero habilitamos el sistema sexagesimal, o modo DEG. Para ello, en la mayoría de las calculadoras pulsamos la tecla **MODE**, luego el número **4** y en el visor leemos D o DEG.

- Es importante tener en cuenta el modo en que cada calculadora ingresa los grados, minutos y segundos sexagesimales. Por lo general hay una tecla que los indica.

Para encontrar por ejemplo el ángulo α sabiendo que senα = 0,2734.

-En la mayoría de las calculadoras, siempre en modo DEG, pulsamos la tecla **SHIFT** y luego la tecla **sin**, finalmente tipeamos el valor 0,2734.

-El valor obtenido siempre está expresado en grados. Si es necesaria más precisión, puedes nuevamente pulsar **SHIFT** y luego la tecla que indica los grados, minutos y segundos.

Ejercicio 57: Practica el uso de la calculadora:

a) Encuentra el ángulo α de la rampa del ejercicio 54.

b) Halla el seno, el coseno y la tangente del otro ángulo agudo que forma esa rampa.

c) Expresa redondeando a milésimos el valor de las siguientes razones trigonométricas:

sen 60° , cos 10° , tg 45°, cos 30,25 °, sen 79,6 °, tg 1,79°

d) Expresa en grados, minutos y segundos el valor de los siguientes ángulos del I cuadrante:

i) sen α = 0,25

ii) cos β = 0,478

iii) tg θ = 1,457

Ejercicio 58: Hallar una medida del ángulo θ en grados que verifique cada igualdad.

Utilizar la calculadora.

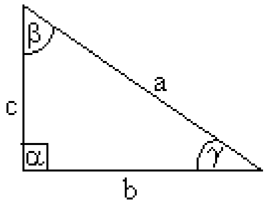
a) $sen\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $tg\ \theta$ = 3,732

Ejercicio 59: Resolver los siguientes triángulos:

a) a = 5 cm , β = 30º , α = 90º

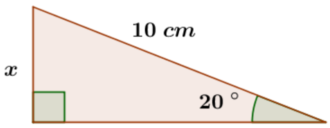
b) b = 2 cm , c = 5 cm , α = 90º

c) b = 82 cm , α = 90º , γ = 57º

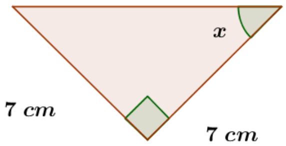


Ejercicio 60: Hallar la medida de x en cada figura.

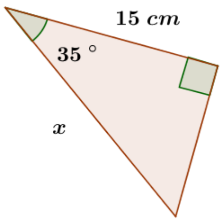
a)



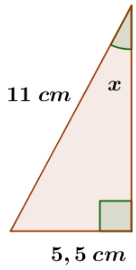
b)



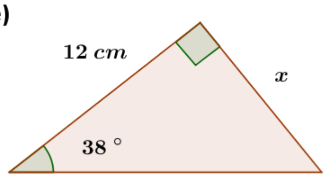
c)



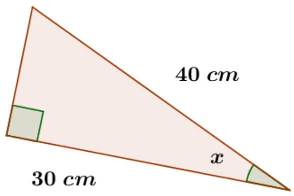
d)



e)



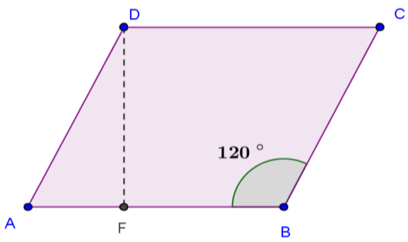
f)



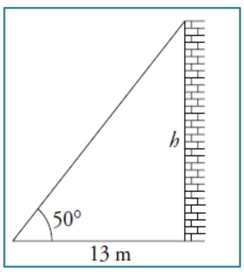
Ejercicio 61: Calcular el perímetro y el área del paralelogramo, teniendo en cuenta los datos.

$\overline{AD} = 10$ cm

$\overline{FB} = 36{,}98$ cm



Ejercicio 62: Cuando el ángulo de elevación del sol sobre el horizonte es de 50° , una torre proyecta una sombra de 13 m. Calcular su altura h.



Ejercicio 63: ¿Cuán larga es la sombra que arroja un mástil de 11 m de altura cuando el sol tiene una elevación de 20º?

Ejercicio 64: El hilo que sujeta un barrilete mide 250 m y forma un ángulo de 32º con la vertical. Hallar la altura a que se halla si se supone que el hilo está en línea recta.

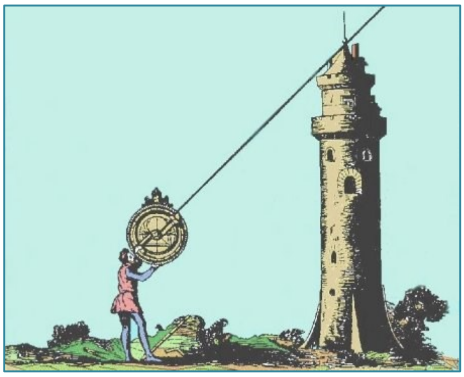
Ejercicio 65: Desde un acantilado de 50 metros se ve un barco bajo un ángulo de 70º con la vertical. ¿A qué distancia de la costa se encuentra el barco?

Ejercicio 66: En un triángulo sabemos que la hipotenusa mide 4 cm y la tangente del ángulo que ésta determina con la base es igual a 0,2. Calcular el área de dicho triángulo.

Ejercicio 67: Un sitio rectangular mide 102m x 296 m. Determinar la longitud de la diagonal y el ángulo que esta forma con el lado mayor.

Ejercicio 68: Calcular el perímetro y el área de un triángulo isósceles, cuyos ángulos iguales miden 27º y sus dos lados iguales 40 m.

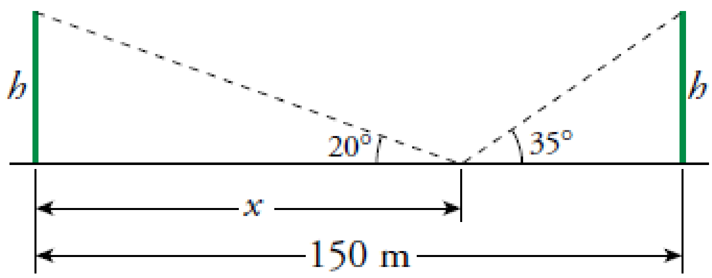
Ejercicio 69: Calcular la altura de la torre como se hacía en la antigüedad, guiándote por la ilustración. El observador está a 7 m de la base de la torre, el ángulo con el que está observando la cúspide es de 60º y sostiene el artilugio a una altura de 1,5 m.



Ejercicio 70: Cuando se apoya una escalera de 3 m de largo en una de las paredes de un pasillo, llega a una altura de 2,50 m. Si se la inclina sobre la otra pared llega a 2 m de altura. Averiguar el ancho del pasillo.

Ejercicio 71 : Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°.

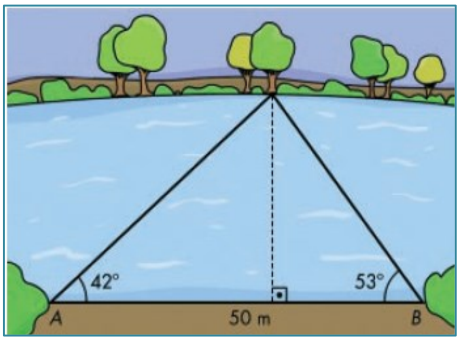
¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo?



Ejercicio 72: Para conocer la altura de una torre se ha medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo 43º . Al acercarse 15 metros hacia la torre, se obtiene un nuevo ángulo de 57º. ¿Cuánto mide la altura de la torre?

Ejercicio 73: Un árbol y un observador se encuentran en orillas opuestas de un río. El observador mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 35º; retrocede 10 metros y mide el nuevo ángulo, obteniendo un resultado de 25º. ¿Qué altura tiene el árbol?

Ejercicio 74: Observar las medidas que ha tomado Juan para calcular la anchura del río.

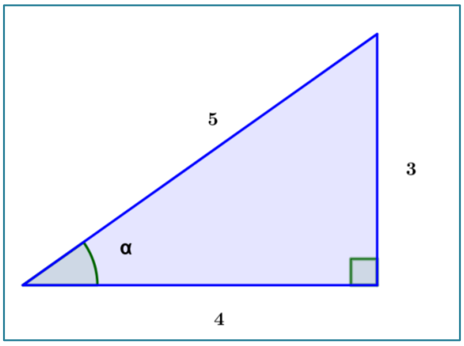


Realizar los cálculos que debe hacer Juan y hallar el ancho del río.

Relaciones entre las Razones Trigonométricas de un Ángulo Agudo

Ejercicio 75: Consideremos el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 unidades de longitud, y cuyos catetos miden 3 y 4 unidades de longitud.

Completar las razones trigonométricas para el ángulo α:



$$\text{sen}\ \alpha = \text{—}$$

$$\cos\alpha = \text{—}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \text{—}$$

a) Completar el cociente $\frac{sen\ \alpha}{cos\alpha} = \frac{-}{-} = -$ ¿Qué valor se obtiene?

Esta relación siempre se cumple porque: $\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\text{CO}}{\text{H}}}{\frac{\text{CA}}{\text{H}}} = \frac{\text{CO}}{\text{CA}} = \text{tg}\alpha$

Es decir que: $\boldsymbol{\frac{sen\ \alpha}{cos\alpha} = tg\alpha}$

A su vez, si elevamos al cuadrado seno y coseno del ángulo α y realizamos su suma:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{(\text{CO})^2}{(\text{H})^2} + \frac{(\text{CA})^2}{(\text{H})^2} = \frac{(\text{H})^2}{(\text{H})^2} = 1 \qquad \text{(¿por qué?)}$$

$$sen^2\alpha \neq sen\alpha^2$$

Es decir que : $\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$

Teorema del Seno

Existe una relación entre los lados de un triángulo cualquiera y sus ángulos interiores.

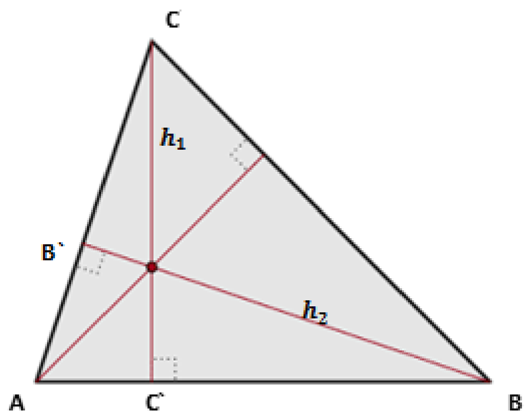
Esta relación es conocida como **teorema del seno**.

Consideremos un triángulo ABC cualquiera.

En él se han trazado las rectas perpendiculares a los lados c y b que pasan por los vértices opuestos a estos lados.

Los segmentos resultantes indicados como $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ se denominan **alturas** para cada uno de estos lados: $\mathbf{h_1}$ es la altura correspondiente al lado c , y $\mathbf{h_2}$ es la altura correspondiente al lado b.

A su vez, estas alturas determinan triángulos rectángulos interiores al triángulo ABC:



En el triángulo rectángulo AC´C se verifica:

$h_1 = b \,.\, \text{sen}(A)$

Y en el triángulo BC´C

h_1 = a . sen (B) entonces $b \,.\, \text{sen}(\hat{A}) = a \,.\, \text{sen}(\hat{B})$

Igualando sendas expresiones resulta amoroso

$$\frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{a}{\text{sen}(\hat{A})}$$

Análogamente, en el triángulo rectángulo B´AB, obtenemos $h_2 = c \,.\, \text{sen}(\hat{A})$

y en el triángulo B´CB obtenemos h_2 = a. sen (C)

Luego

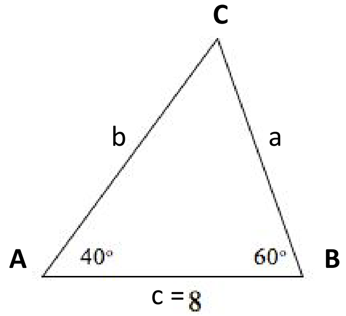
$$c \,.\, \text{sen}(\hat{A}) = a \,.\, \text{sen}(\hat{C})$$

$$\frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = \frac{a}{\text{sen}(\hat{A})}$$

De las dos expresiones obtenidas podemos deducir que $\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$

… expresión conocida como **teorema del seno**.

Ejemplo 1: Dado el siguiente triángulo, averiguar lados a y b y el ángulo C.



Solución: Hallamos el ángulo faltante $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

$$\hat{C} = 180^o - \hat{A} - \hat{B} = 180^o - 40^o - 60^o$$

$$\mathbf{\hat{C} = 80^o}$$

Recurrimos al teorema del seno:

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$$

Hallamos el lado **a**

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$$

$$a = \frac{c. sen(\hat{A})}{sen(\hat{C})}$$

$$a = \frac{8. sen(40°)}{sen(80°)}$$

$$a = \frac{8. sen(40°)}{sen(80°)}$$

$$\mathbf{a \cong 5.22}$$

Hallamos el lado **b**

$$\frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$$

$$b = \frac{c. sen(\hat{B})}{sen(\hat{C})}$$

$$b = \frac{8. sen(60°)}{sen(80°)}$$

$$b = \frac{8. sen(60°)}{sen(80°)}$$

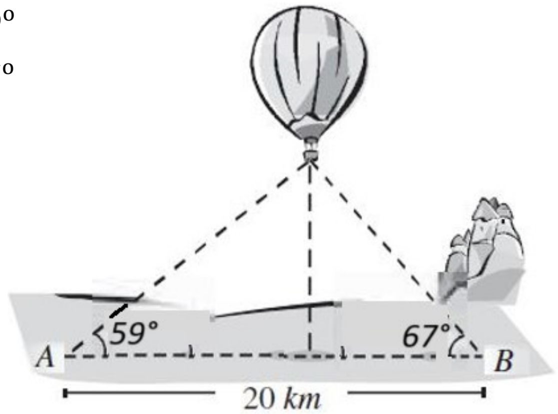
$$\mathbf{b \cong 7.04}$$

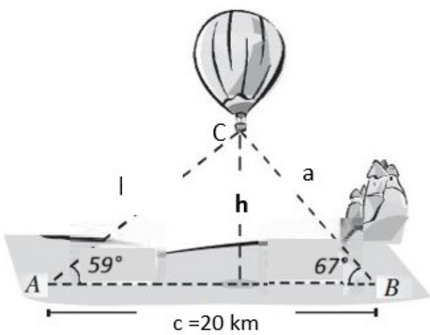
Ejemplo 2: La distancia entre los puntos A y B es de 20 km. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a dichos puntos son de 59° y 67°. ¿A qué altura del suelo se encuentra el globo?

Solución: Podría tratarse de un problema, sumamente complicado… Pero, no lo es.

$\hat{A} = 59^o$

$\hat{B} = 67^o$





Hallamos el ángulo faltante:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$$

$$\hat{C} = 180^o - \hat{A} - \hat{B} = 180^o - 59^o - 67^o$$

$$\hat{C} = 54^o$$

Vamos a calcular el lado **a** opuesto al ángulo A.

Tenemos los 20Km que el problema nos da de referencia, y tenemos el ángulo $\hat{C} = 54^o$, opuesto a ese lado, que es el que encontramos.

Lo conveniente, de acuerdo a los datos, es recurrir al teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\hat{C})}$$

Despejando "a"

$$a = \frac{c.\operatorname{sen}(\hat{A})}{\operatorname{sen}(\hat{C})}$$

$$a = \frac{20\text{ km}.\operatorname{sen}(59°)}{\operatorname{sen}(54°)}$$

$$a \cong 21.19\text{ km}$$

En el triángulo rectángulo que queda determinado al trazar "h"(la altura que buscamos), aplicamos la función seno para obtener el cateto opuesto.

$$\operatorname{sen}(\hat{B}) = \frac{\mathbf{h}}{a}$$

$$\mathbf{h} = a.\operatorname{sen}(\hat{B})$$

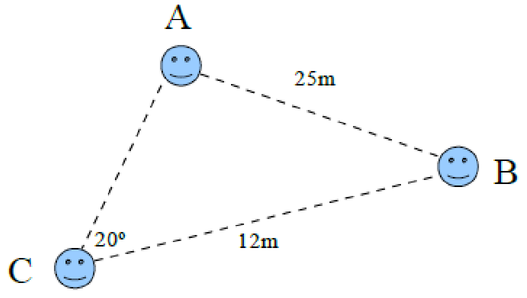
$$\mathbf{h} = 21.19\text{km}.\operatorname{sen}(67°)$$

$$\mathbf{h} \cong 19.50\text{km}$$

La altura del globo es aproximadamente 19.50 kilómetros.

Ejercicio 76: Los lados de un triángulo isósceles forman un ángulo de 80º con la base. Si el triángulo tiene 30 centímetros de base, calcular la longitud de dichos lados.

Ejercicio 77: Tres amigos se ubican en un campo de fútbol. Entre Aldo y Bruno hay 25 metros, y entre Bruno y Carlos, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Carlos es de 20º. Calcular la distancia entre Aldo y Carlos.



Teorema del Coseno

Existe una relación que nos permite resolver triángulos cuando se conocen dos lados y el ángulo que estos forman o, cuando se conocen sus tres lados.

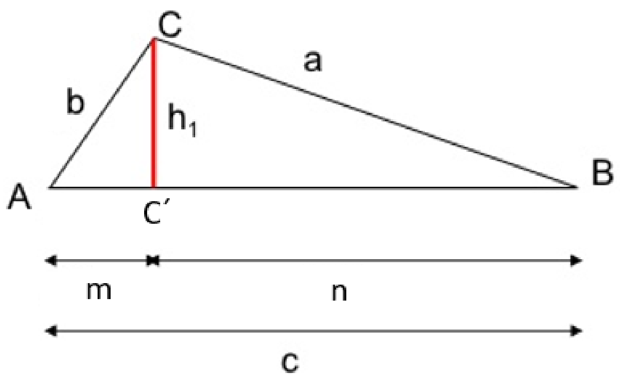
Esta relación es conocida como **teorema del coseno**.

Consideremos un triángulo ABC cualquiera.

En él se ha trazado una recta perpendicular al lado c que pasa por el vértice C opuesto a estos lados.

El segmento resultante indicado como $\mathbf{h_1}$ es la altura correspondiente al lado c.

A su vez, esta altura determina dos triángulos rectángulos interiores al triángulo ABC:



En el triángulo rectángulo AC´C se verifica:

$$b^2 = m^2 + h_1^2$$

Como m y n son las proyecciones ortogonales de los lados b y a sobre el lado c se verifica que n = c – m

En el triángulo rectángulo BC´C se verifica:

$$a^2 = h_1^2 + n^2$$

Por lo tanto resulta:

$$a^2 = h_1^2 + n^2$$

$$a^2 = h_1^2 + (c - m)^2$$

$$a^2 = (h_1^2 + m^2) + c^2 - 2cm$$

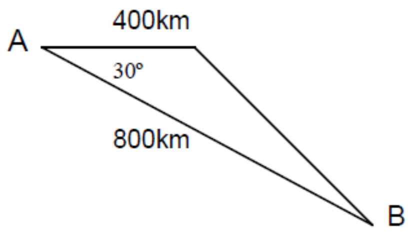
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

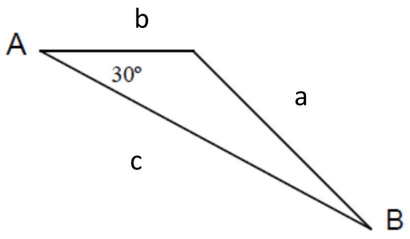
Como en el triángulo rectángulo AC´C es m = b . cos(A), si sustituimos en la expresión anterior

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

… expresión conocida como **teorema del coseno**.

Ejemplo 3: Un piloto debe volar desde una ciudad A hasta otra ciudad B, distante 800km. Al comenzar el vuelo debe alterar su rumbo en 30º para esquivar una tormenta, recorriendo en esta dirección 400km. Desde allí se dirige directamente a la ciudad B. ¿En cuántos km se alargó el recorrido para llegar a B?





Solución: Recurrimos al teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$$

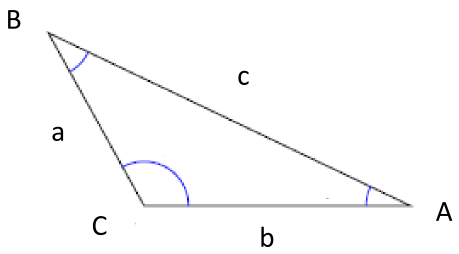
$$a^2 = 400^2 + 800^2 - 2.400.800.\cos(30°)$$

$$a \cong 495.73 \text{ km}$$

El recorrido para llegar a B se alargó 95.73 km.

Ejemplo 4: Hallar los ángulos del triángulo ABC, si sus lados son a = 3 m, b = 5 m y c = 7 m.

Solución:



Recurrimos al teorema del coseno: $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\hat{C})$

Hallamos el ángulo $\hat{A}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$$

$$\cos(\hat{A}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c}$$

Hallamos el ángulo $\hat{B}$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos(\hat{B})$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c}$$

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{5^2 + \ 7^2 - \ 3^2}{2.5.7} \qquad\qquad \cos(\widehat{B}) = \frac{3^2 + \ 7^2 - \ 5^2}{2.3.7}$$

$$\cos(\widehat{A}) \cong 0.9285 \qquad\qquad \cos(\widehat{B}) \cong 0.79$$

$$\widehat{A} \ \cong \text{arc.}\cos(0.9285) \qquad\qquad \widehat{B} \ \cong \text{arc.}\cos(0.79)$$

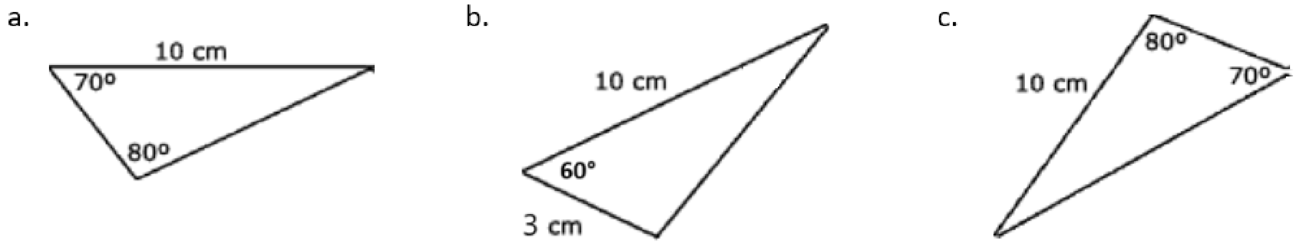
$$\widehat{A} \ \cong 21.80° \qquad\qquad \widehat{B} \ \cong 37.81°$$

Finalmente $$\hat{C} = 180^{o} - \widehat{A} - \widehat{B}$$

$$\hat{C} \cong 180^{o} - 21.80^{o} - 37.81^{o}$$

$$\hat{C} \cong 120.39^{o}$$

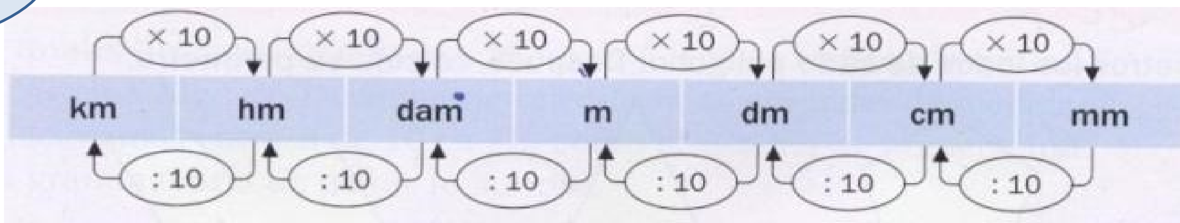
Ejercicio 78: Dados los siguientes triángulos, determinar los lados y ángulos faltantes.



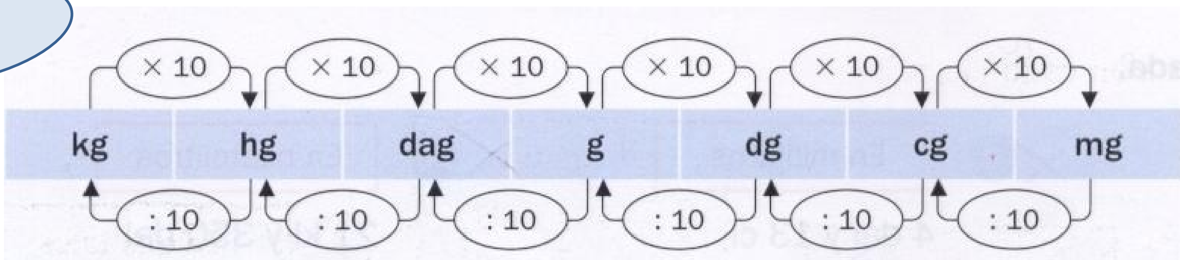
Ejercicio 79: Un día calmo, desde lo alto de un globo, se observa Comodoro Rivadavia con un ángulo de 50º, y Rada Tilly, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60º. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilómetros de Comodoro Rivadavia y a 4 de Rada Tilly, calcular la distancia entre las ciudades.

APÉNDICE A – Unidades de Medida

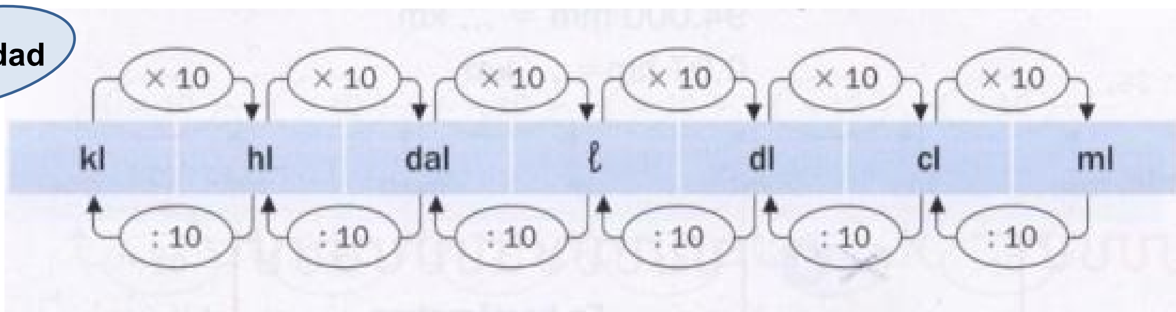
Longitud



Peso

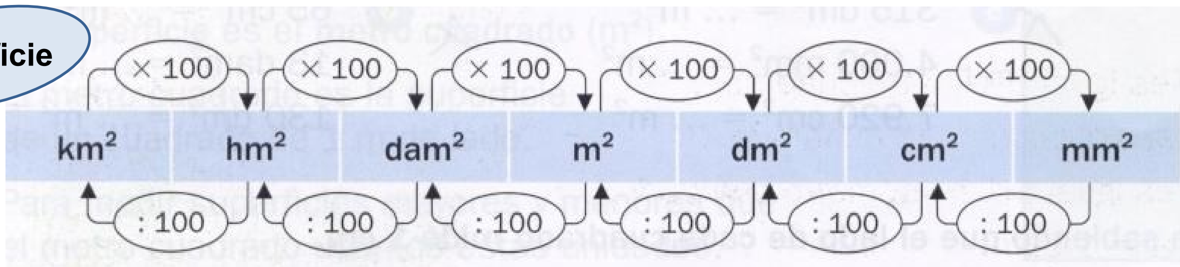


Capacidad



NOTA $1\ l = 1\ dcm^3$

Superficie



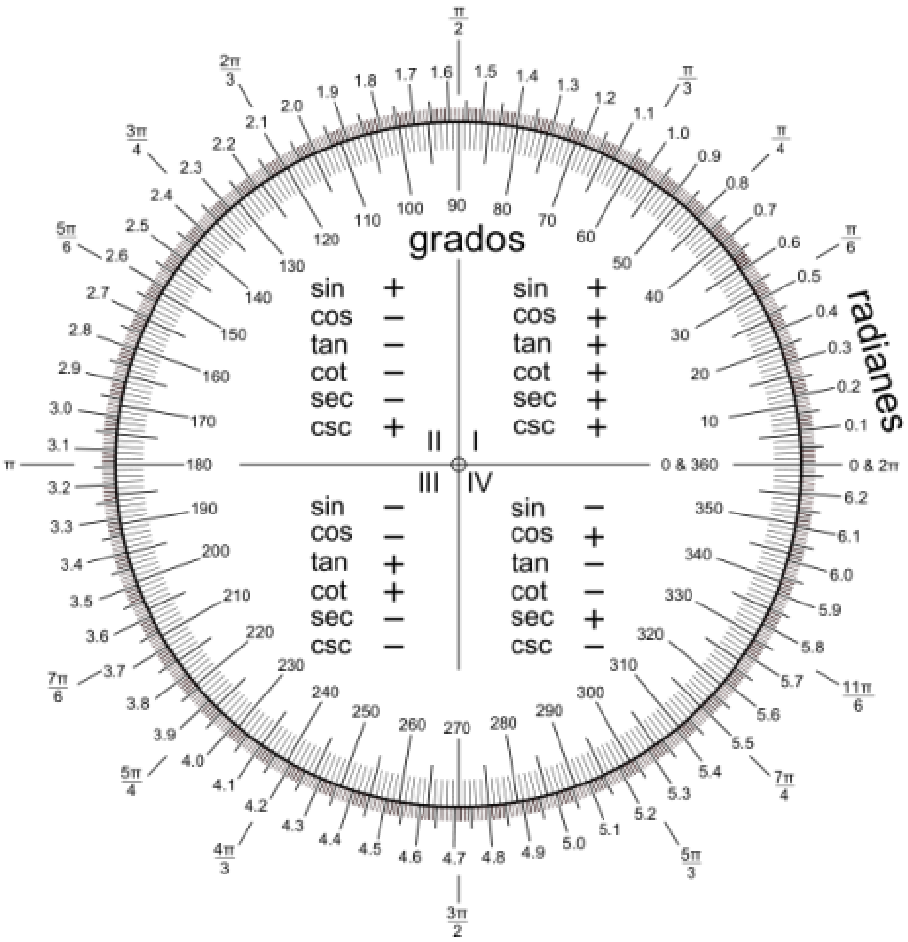
NOTA 1 hectárea = $1\ hm^2$

APÉNDICE B – Medición de Ángulos – Sistemas Sexagesimal y Radial

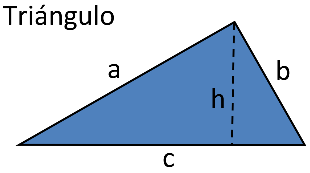
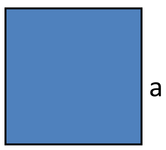
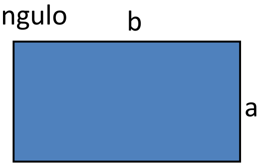
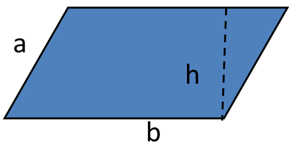
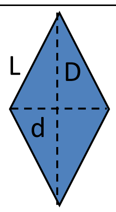
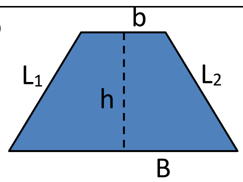
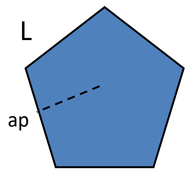
MEDIDAS DE ÁNGULOS			Equivalencias
Unidad	grado	$1° = \frac{1\ llano}{180}$	$1° = 60\ ' = 3600\ ''$
Submúltiplos	minutos	$1' = \frac{1°}{60}$	$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{º} = 60''$
	segundos	$1'' = \frac{1'}{60}$	$1''=\left(\frac{1}{3600}\right)^{º} = \left(\frac{1}{60}\right)'$

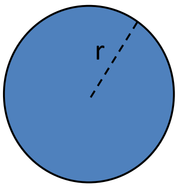
Relaciones de equivalencias entre los dos sistemas:

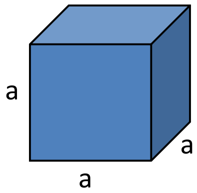
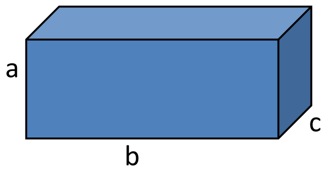
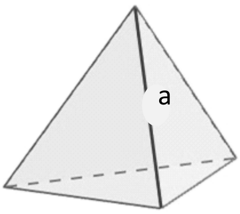
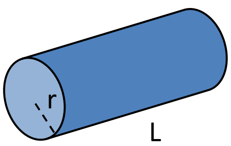
$$1\ \text{giro} = 2\pi\ \text{rad} = 360°$$
$$1\ \text{llano} = \pi\ \text{rad} = 180°$$
$$1\ \text{recto} = \frac{\pi}{2}\ \text{rad} = 90°$$

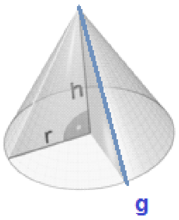
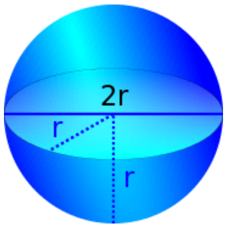


APÉNDICE C – <u>Fórmulas de Perímetros, Áreas y Volúmenes más usadas</u>

Figura	**Perímetro**	**Área**
Triángulo 	$P = a + b + c$	$A = \dfrac{h\,c}{2}$
Cuadrado 	$P = 4\,a$	$A = a^2$
Rectángulo 	$P = 2\,a + 2\,b$	$A = a\ b$
Paralelogramo 	$P = 2\,a + 2\,b$	$A = h\,b$
Rombo 	$P = 4\,L$	$A = \dfrac{D\,d}{2}$
Trapecio 	$P = B + b + L_1 + L_2$	$A = \dfrac{(B+b)}{2}\,h$
Polígono regular de n lados  (ap) : apotema	$P = n\,L$	$A = \dfrac{n\,L}{2}\,(ap)$

Circunferencia y Círculo 	$P = 2\pi\, r$ (circunferencia)	$A = \pi\, r^2$ (círculo)

Cuerpo Geométrico	**Área**	**Volumen**
Cubo 	$A = 6\, a^2$	$V = a^3$
Paralelepípedo 	$A = 2ab + 2bc + 2ac$	$V = a\, b\, c$
Tetraedro Regular 	$A = \sqrt{3}a^{2}$	$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^{3}$
Cilindro 	$A = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, L$ (con tapa) $A = \pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, L$ (sin tapa)	$V = \pi\, r^2\, L$

Cono 	$A = \pi\, rg + \pi\, r^2$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2\, h$
Esfera 	$A = 4\pi\, r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

APÉNDICE D – Aproximación y Redondeo

Al operar con números decimales de muchas cifras, se emplean valores aproximados.

La **aproximación por defecto** es cuando el cálculo aproximado es menor que el número dado.

La **aproximación por exceso** es cuando el cálculo aproximado es mayor que el número dado.

Ejemplo: $\sqrt{7} \cong 2.6457513110645905905016157536393$

Aproximación por defecto: $2.6457 < \sqrt{7}$

Aproximación por exceso: $2.646 > \sqrt{7}$

El **redondeo** consiste en **aumentar en una unidad** la última cifra conservada siempre que la primera omitida sea **mayor o igual que 5**.

APÉNDICE E – Notación Científica

Para expresar un número en **NOTACIÓN CIENTÍFICA** se lo debe escribir de la siguiente forma **$N\ 10^n$**, donde **N** es un número real de una sola cifra entera distinta de cero y **n** es un número entero

La notación científica permite captar rápidamente el **orden de magnitud** de una cantidad por medio del exponente **n**.

N EXP n

N EXP n +/- si **n** es un número negativo

Ejemplos:

- Edad de la Tierra:
  4 000 000 000 años = 4 10^{9}años   4 EXP 9

- Diámetro del núcleo de un átomo:
  0,000 000 000 000 003 m = 3 10^{-15}m   3 EXP 15 +/-

APÉNDICE F – Porcentajes

Los porcentajes son fracciones de denominador 100.

También se pueden pensar como decimales.

Un porcentaje **p**, se escribe **p %**.

$$\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\ \%$$

como fracción   como decimal   como porcentaje

Ejemplo: ¿qué porcentaje de 25 es 20?

Tener un porcentaje de algo significa que tienes ese porcentaje de cada 100.

Se puede establecer una proporción para descubrir qué porcentaje de 25necesitamos tomar para obtener 20.

$$\frac{\text{porcentaje}}{100} = \frac{20}{25}$$

$$\frac{\text{porcentaje}}{100} = \frac{4}{5}$$

$$\text{porcentaje} = \frac{4}{5} * 100$$

$$\textbf{porcentaje} = \textbf{80}\ \%$$

APENDICE G - Cifras significativas de un número.

Son aquellas que tienen un significado real y, por tanto, aportan alguna información. Toda medición experimental es inexacta y se debe expresar con sus cifras significativas.

Ejemplo: Medimos la longitud de una hoja de papel con una regla graduada en milímetros. El resultado se puede expresar de la siguiente manera:

Longitud (L) = 29,7cm

No es esta la única forma de expresar el resultado, pues también puede ser:

L = 0,297 m L = 2,97 dm L = 297 mm

Se exprese como se exprese el resultado tiene tres cifras significativas, que son los dígitos considerados como ciertos en la medida.

Cumplen con la definición pues tienen un significado real y aportan información.

Un resultado como L = 0,2970 m no tiene sentido ya que el instrumento que hemos utilizado para medir no es capaz de resolver las diezmilésimas de metro.

Por tanto, y siguiendo con el ejemplo, el número que expresa la cantidad en la medida tiene tres cifras significativas.

Pero, de esas tres cifras sabemos que dos son verdaderas y una es **incierta**:

L = 0,29$\underline{7}$ m

La incertidumbre de la última cifra también se puede poner de manifiesto si realizamos una misma medida con dos instrumentos diferentes, en nuestro caso dos reglas milimetradas. No hay dos reglas iguales y, por tanto, cada instrumento puede aportar una medida diferente.

La última cifra de la medida de nuestro ejemplo es significativa pero incierta, la forma más correcta de indicarlo (asumiendo por ahora que la incertidumbre es de ±1 mm), es $L = 0{,}297 \pm 0{,}001$ m

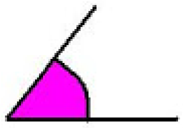
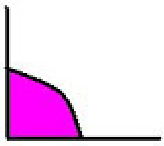
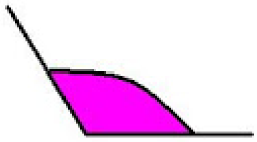
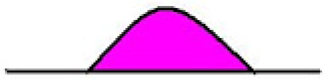
El llamado convenio de cifras significativas que asume que "**cuando un número se expresa con sus cifras significativas, la última cifra es siempre incierta".**

APÉNDICE H – Alfabeto Griego

Α	α	alpha	Ι	ι	iota	Ρ	ρ	rho
Β	β	beta	Κ	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	Τ	τ	tau
Ε	ε	epsilon	Μ	μ	mu	Υ	υ	upsilon
Δ	δ	delta	Ν	ν	nu	Φ	φ	phi
Ζ	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	Χ	χ	chi
Η	η	eta	Ο	ο	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

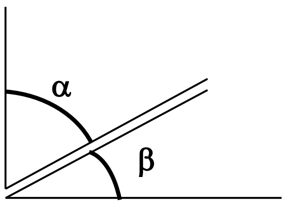
I– Clasificación de Ángulos

Según su amplitud

Nombre	**Figura**	**Amplitud en radianes**
Agudo		$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
Recto		$\theta = \frac{\pi}{2}$
Obtuso		$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
Llano		$\theta = \pi$

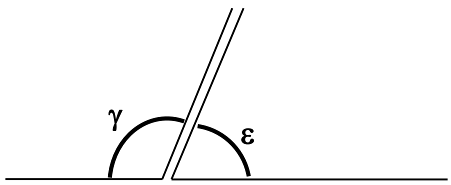
Según su suma

ANGULOS COMPLEMENTARIOS



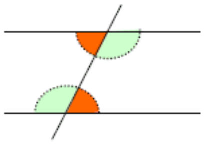
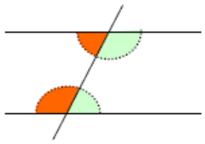
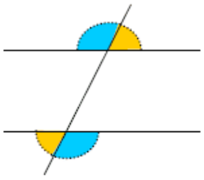
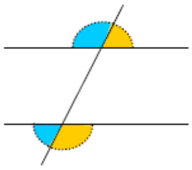
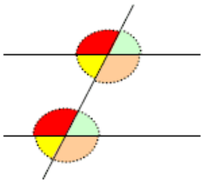
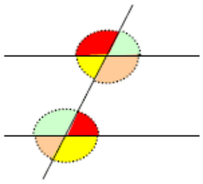
$\alpha + \beta = 90º$

ANGULOS SUPLEMENTARIOS

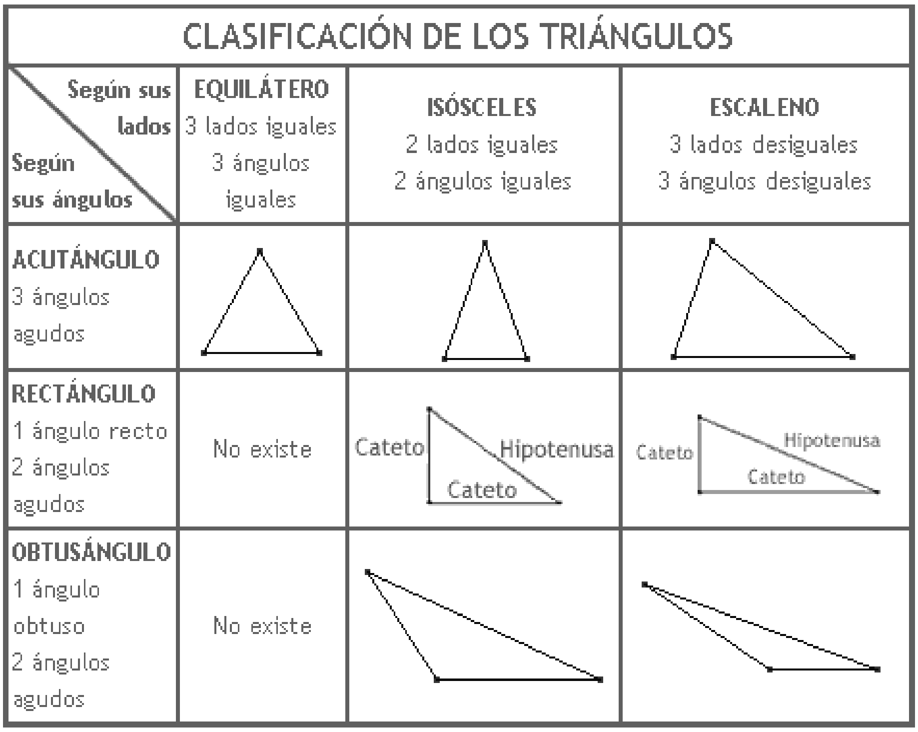


$\gamma + \varepsilon = 180º$

APÉNDICE J– Ángulos entre paralelas

ÁNGULOS IGUALES		ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS	
ALTERNOS INTERNOS Se ubican a los lados opuestos de la secante ENTRE las paralelas		**COLATERALES INTERNOS** Se ubican del mismo lado de la secante y ENTRE las paralelas	
ALTERNOS EXTERNOS Se ubican a los lados opuestos de la secante FUERA delas paralelas		**COLATERALES EXTERNOS** Se ubican del mismo lado de la secante y FUERA de las paralelas	
ALTERNOS INTERNOS Se ubican del mismo lado de la secante, uno es interno y otro externo		**CONJUGADOS** Se ubican a los lados opuestos de la secante. Uno es interno y otro externo	

APÉNDICE K - Clasificación de Triángulos



CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS			
Según sus lados / Según sus ángulos	EQUILÁTERO 3 lados iguales 3 ángulos iguales	ISÓSCELES 2 lados iguales 2 ángulos iguales	ESCALENO 3 lados desiguales 3 ángulos desiguales
ACUTÁNGULO 3 ángulos agudos			
RECTÁNGULO 1 ángulo recto 2 ángulos agudos	No existe	Cateto Hipotenusa Cateto	Cateto Hipotenusa Cateto
OBTUSÁNGULO 1 ángulo obtuso 2 ángulos agudos	No existe		

APÉNDICE L– Demostraciones en Matemática

Las demostraciones en Matemática parten de

- **Axiomas:** Afirmaciones iniciales que se aceptan como bases.
- Un conjunto de axiomas que no entran mutuamente en contradicción, forma un **sistema axiomático.**

A partir de un sistema axiomático se construyen las demostraciones, las cuales derivan en diferentes *resultados*:

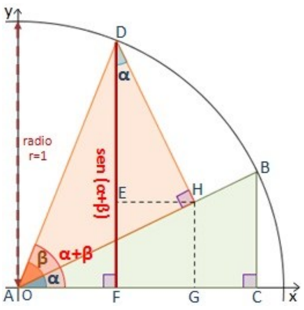
- **Proposición:** Resultado intermedio y relativamente inmediato – de sencilla demostración -, con cierta importancia en sí mismo.
  Puede ser una consecuencia directa de una definición, que conviene escribirpara referirnos a ella cuando la necesitemos.
- **Teorema:** Resultado importante, no tan inmediato como una Proposición.
- **Lema**: Resultado auxiliar, paso en una demostración de un teorema, pero que conviene aislar porque se repite en las demostraciones de

  distintos teoremas.
- **Corolario**: Resultado que se demuestra de inmediato a partir de la aplicación de un Teorema. Suele ser un caso particular de una situación mucho más amplia, que conviene aislar por alguna razón.

APÉNDICE M - Razones e Identidades Trigonométricas

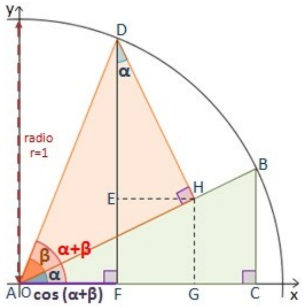
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS.					
	0º	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Razones trigonométricas de ($\alpha + \beta$)



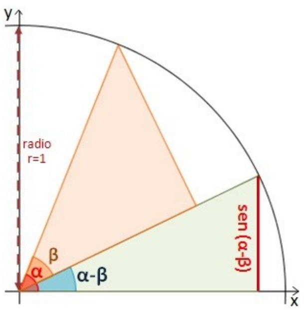
sen($\alpha + \beta$) = senαcosβ + cosαsenβ

cos($\alpha + \beta$) = cosαcosβ – senαsenβ



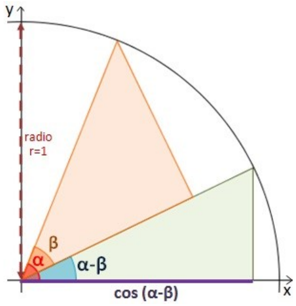
$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

Razones trigonométricas de ($\alpha - \beta$)



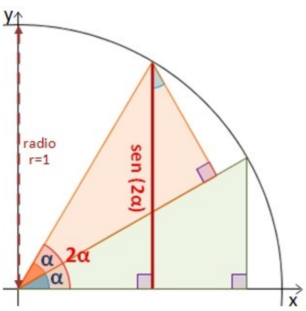
sen($\alpha - \beta$) = senαcosβ – cosαsenβ

cos($\alpha - \beta$) = cosαcosβ + senαsenβ



$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble



sen 2α = 2 senαcosα

cos 2α = cos$^2\alpha$ – sen$^2\alpha$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$